

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра вычислительной физики

Исследование колебаний маятника в поле силы тяжести
Учебно-методическое пособие

Монахов В.В., Огинец О.В.

Автоматизированный практикум по физике

МЕХАНИКА

Санкт-Петербург

- 2006 -

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
физического учебно-научного центра (ФУНЦ) СПбГУ
Утверждено на заседании кафедры вычислительной физики*

Рецензент: докт. физ.-мат. наук, проф. Е.И.Бутиков

В.В.Монахов, О.В.Огинец, Исследование колебаний маятника в поле силы тяжести:
Учебно-методическое пособие. - СПб, Издательство СПбГУ, 2006, 24 с.; 12 ил., 4 библ.

Пособие предназначено для студентов 2 курса физического факультета СПбГУ и учащихся младших курсов других ВУЗов, изучающих физику. В нём даны теоретические сведения о математическом и физическом маятнике, а также особенностях измерения физических величин с помощью аналого-цифровых преобразователей (АЦП). Описан порядок выполнения компьютеризированной лабораторной работы.

Изложена простейшая теория математического маятника без трения, а также при наличии сухого и вязкого трения. Исследуются нелинейные явления, возникающие при больших углах отклонения. Обсуждаются другие факторы, которые приводят к отклонениям от простейшей теории в реальном эксперименте. Выводится уравнение движения физического маятника, вводится понятие приведенной длины.

Описаны экспериментальная компьютеризированная установка и программное обеспечение, используемые для выполнения работы. При выполнении практических заданий исследуются возможности электрического измерения неэлектрических величин на примере датчика поворота и аналого-цифрового преобразователя. Изучаются особенности нахождения скорости и ускорения с помощью численного дифференцирования. Исследуется затухание колебаний под действием сухого и вязкого трения. Строится фазовая диаграмма системы при разных условиях. Изучается зависимость периода колебаний от длины подвеса и сравнивается с теорией, учитывающей момент инерции подвеса. Проводится измерение амплитудной зависимости периода колебаний и сравнение с теорией, учитывающей в первом приближении нелинейность колебаний.

© В.В.Монахов, О.В.Огинец, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Описание экспериментальной установки.....	4
2. Теоретическая часть.....	6
2.1. Измерения с использованием АЦП. Нахождение величин по экспериментальным данным с помощью численного дифференцирования.....	6
2.2. Простейшая теория математического маятника.....	8
2.3. Затухание колебаний под действием сухого трения.....	11
2.4. Затухание колебаний под действием вязкого трения.....	13
2.5. Простейшая теория физического маятника	14
2.6. Фазовая диаграмма.....	17
2.7. Нелинейности при большой амплитуде колебаний	18
3. Контрольные вопросы.....	19
4. Порядок выполнения работы.....	19
Задание 1. Моделирование колебаний маятника.....	19
Задание 2. Измерение углов с помощью АЦП. Цифровой осциллограф.....	20
Задание 3. Измерение $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$	20
Задание 4. Изучение трения (измерение зависимости амплитуды колебаний от времени).....	20
Задание 5. Исследование фазовой диаграммы.....	20
Задание 6. Измерение зависимости периода от длины подвеса.....	21
Задание 7. Измерение зависимости периода колебаний от их амплитуды.....	21
Приложение 1.....	21
Приложение 2.....	23
Литература.....	23

1. Описание экспериментальной установки

Исследуемый маятник (рис.1) состоит из груза 1, который может свободно передвигаться по легкому стержню 2. Положение груза на стержне устанавливается с помощью фиксатора 3. Стержень 2 крепится на поворотном вале 4 в точке 5. К оси вала подсоединена ось потенциометра 6, являющегося датчиком угла поворота маятника. Вал, ось потенциометра и движок потенциометра вращаются вместе со стержнем и грузом, и поэтому все вместе составляют исследуемый объект - физический маятник.

Потенциометр установлен в специальном держателе 7, закрепленном на вертикальной стойке 8. Эта стойка с помощью подставки – треножника установлена на лабораторном столе.

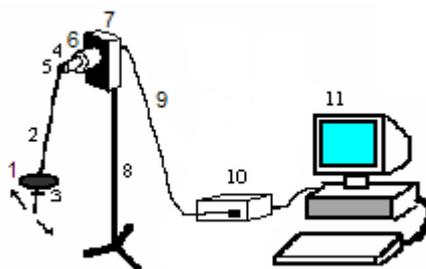


Рис 1. Установка для исследования колебаний маятника

Потенциометр 6 соединен кабелем 9 с разъемом электронного блока автоматизации эксперимента 10, содержащего в своём составе *аналого-цифровой преобразователь (АЦП)* и *цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП)*. Блок автоматизации подсоединяется к компьютеру 11 через разъем USB (Universal Serial Bus – универсальная последовательная шина).

В двух заданиях лабораторной работы исследуется влияние трения на характеристики маятника. Наличие трения в используемой в данном эксперименте установке может быть связано с тремя причинами.

- 1) "Сухое" трение скольжения в точке соприкосновения вала с подставкой (рис.2).

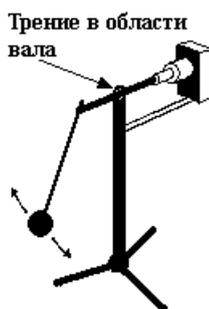


Рис.2. Сухое трение в точке соприкосновения вала и подставки

В этом случае сила реакции опоры при небольших отклонениях будет пропорциональна весу груза, и момент силы трения также будет пропорционален весу груза (весом стержня пренебрегаем):

$$|\vec{r} \times \vec{F}_{mp}| = \pm kmg r \quad (1)$$

где r - радиус вала, k – коэффициент трения вала, m – масса груза.

2) "Сухое" трение скольжения в поворотном механизме, не связанное с весом груза – например, в датчике угла поворота (потенциометре). Момент этой силы будет определяться силой F_{np} прижатия пружины в датчике, коэффициентом трения движка и радиусом датчика R :

$$|\vec{R} \times \vec{F}_{mp}| = \pm k F_{np} R \quad (2)$$

Аналогичный эффект будет наблюдаться в системе без потенциометра, в которой трение возникает из-за того, что поворотный вал зажат с торцов. В этом случае момент силы трения также не будет зависеть от массы груза, а будет определяться значением F_{np} силы прижатия торцов вала, соответствующим коэффициентом трения и плечом этой силы (расстоянием от места приложения силы до оси вращения).



Рис.3. Сухое трение в датчике угла поворота (потенциометре)

Знак "+" или "-" в (1) и (2) зависит от направления движения маятника, т.к. сила трения всегда направлена против направления движения.

3) Момент силы "вязкого" трения маятника о воздух. Величину этого трения можно регулировать с помощью листа картона ("паруса"), закрепляемого на стержне.

Регистрация угла поворота производится следующим образом. С помощью компьютера на выходе ЦАП устанавливается постоянное программно регулируемое напряжение $U_{цап}$ (рис.4).

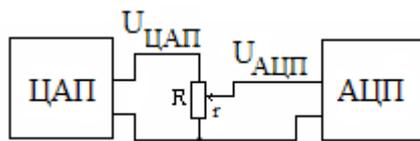


Рис.4. Схема измерения угла поворота маятника

Это напряжение подается на верхний на рис.4 вывод потенциометра, нижний вывод которого заземлен. Полное сопротивление между верхним и нижним выводами потенциометра равно R . Напряжение, соответствующее углу поворота маятника, снимается с движка потенциометра и подается на аналого-цифровой преобразователь (АЦП) блока автоматизации. Сопротивление r от нижней (заземлённой) части потенциометра до движка линейно связано с углом поворота Θ : $r = k_1(\Theta - \Theta_{r=0})$, где $\Theta_{r=0}$ - угол, при котором достигается нулевое сопротивление, а k_1 - некий коэффициент. Поэтому регистрируемое напряжение $U_{ацп}$, связанное с величиной выходного напряжения ЦАП $U_{цап}$ соотношением $U_{ацп} = \frac{r}{R} U_{цап}$, также

линейно зависит от угла поворота: $U_{ацп} = \frac{k_1}{R} U_{цап} (\Theta - \Theta_{r=0}) = k(\Theta - \Theta_{r=0})$. Для установления точного значения коэффициента k и угла $\Theta_{r=0}$ требуется специальная процедура градуировки установки. Она уже проведена на этапе разработки установки, поэтому в соответствующих заданиях программа показывает углы в радианах.

Следует отметить, что в поворотных механических системах, состоящих из нескольких соединённых друг с другом элементов, обычно присутствует так называемый "мёртвый ход". Он возникает в случае, когда направление поворота элемента, вызывающего движение

остальных частей системы (назовём его ведущим), меняется на противоположное. При этом возникает ситуация, когда ведущий элемент уже начал движение в новом направлении, но из-за наличия зазора между передаточными элементами (например, зубцами шестерёнок) или их упругой деформации другие части системы начинают смену направления движения с запаздыванием. Поэтому оказывается, что ведущий элемент движется, а интересующий нас элемент системы (назовём его конечным) остаётся неподвижным. Так происходит вплоть до поворота ведущего элемента на некоторый угол, после чего начинается движение конечного элемента. В нашем случае потенциометр, выступающий в роли датчика, соединяется с шарниром короткой гибкой трубкой. Она достаточно жёсткая, поэтому обеспечивает поворот вала потенциометра. Но в точках поворота из-за смены направления деформации трубки будет наблюдаться некоторая задержка движения потенциометра по сравнению с движением маятника. Из-за чего вблизи точек поворота на экспериментально измеряемых зависимостях $\Theta(t)$ будут наблюдаться плоские участки.

2. Теоретическая часть

2.1. Измерения с использованием АЦП. Нахождение величин по экспериментальным данным с помощью численного дифференцирования

Сигналы, в которых напряжение меняется непрерывно, называются аналоговыми. Существуют еще цифровые сигналы, которые принимают только два значения, называемые цифровым нулём и цифровой единицей. Компьютер работает только с цифровыми сигналами. Поэтому для ввода информации об аналоговых сигналах в компьютер их сначала требуется перевести в цифровую форму – представить в виде последовательностей чисел, несущих информацию о величине напряжения в нужные моменты времени. Аналого-цифровые преобразователи (АЦП) выполняют такое преобразование. Они применяются в современных научных и промышленных установках, где необходима быстрая регистрация электрических сигналов.

На вход АЦП подаётся электрический сигнал, и после команды “начать преобразование” происходит измерение входного напряжения – представление его в виде числа. Этот процесс происходит за конечное время, называемое временем преобразования. Поэтому за некоторый промежуток времени удаётся измерить напряжение только в конечном числе точек. Чем быстрее АЦП, тем больше это число точек.

Напряжение, измеренное с помощью АЦП, представляется в виде двоичного кода, то есть целого двоичного числа, лежащего в пределах, задаваемых аппаратными особенностями АЦП. Величина измеренного напряжения линейно связано со значением этого числа. Таким образом, измеренное напряжение будет принимать значение из большого, но фиксированного набора значений.

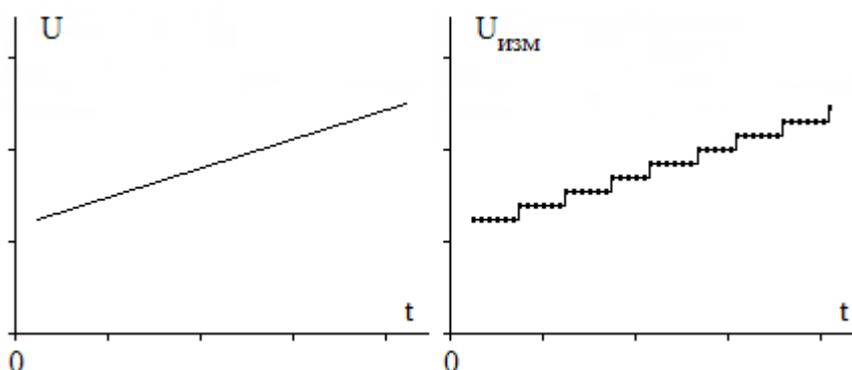


Рис 5. Измерение напряжения с помощью АЦП. Точками отмечены результаты измерений. Из-за этого регистрируемые зависимости приобретают характерную ступенчатую форму. Например, если входное напряжение U будет линейно меняться со временем, измеренное

напряжение $U_{изм}$ будет меняться ступеньками (рис.5), соответствующими цене младшего деления (младшего разряда) нашего прибора – АЦП.

На первый взгляд это кажется необычным. Но такой же результат в виде “ступенек” дадут измерения с помощью обычного вольтметра в случае, если мы будем записывать показания с точностью до младшего деления вольтметра.

Описанные выше ступенчатые зависимости будут наблюдаться при отсутствии помех (шума). Но, как правило, в измеряемом сигнале присутствует шум. При этом одиночные измерения будут давать выбросы вверх или вниз от зависимостей, которые получались бы без шума.

С помощью АЦП удаётся измерять не только электрические величины. В данной работе АЦП используется для регистрации угла поворота. В качестве устройств, преобразующих значения неэлектрических величин в напряжение или ток, служат специальные устройства – датчики. В нашем случае в качестве датчика служит потенциометр. Таким образом, напряжение, измеренное АЦП, соответствует углу поворота, или, при небольших отклонениях, координате x . Существуют датчики скорости, ускорения, давления, температуры, влажности и т.д.

Если мы знаем зависимость $x(t)$ в аналитическом виде, то есть в виде формулы, путём дифференцирования по времени легко найти зависимость $v(t)$. А путём дифференцирования $v(t)$ – найти зависимость $a(t)$. По результатам экспериментальных измерений $x(t)$ также можно найти $v(t)$ и $a(t)$, но только приближённо, так как возникает проблема, связанная с дискретностью экспериментальных данных. Для нахождения $v(t)$ нам приходится использовать численное дифференцирование – заменять отношение дифференциалов $\frac{dx(t)}{dt}$ отношением $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ для конечных промежутков времени Δt . Поэтому для быстро меняющихся зависимостей $x(t)$ найденная таким образом зависимость $v(t)$ будет содержать большую ошибку. Для медленно меняющихся величин при точном измерении значений $x(t)$ ошибка должна быть мала. Но, во-первых, измерения проводятся с конечной точностью, во-вторых, в них всегда присутствует шум.

Рассмотрим, как влияет на результаты численного дифференцирования первый фактор – “ступенчатость” измеренных зависимостей. Ступеньки наблюдаются в том случае, когда частота измерений велика, и за время, прошедшее между измерениями, изменение напряжения на входе АЦП оказывается меньше значения младшего разряда АЦП. Поэтому показания нашего прибора (АЦП) не меняются. А это означает, что отношение $\frac{\Delta U_{изм}}{\Delta t}$ (а значит и $\frac{\Delta x}{\Delta t}$) в пределах ступеньки будет в точности равно нулю! Напротив, при переходе от одной ступеньки к другой величина $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ будет принимать очень большое значение – тем большее, чем меньше Δt , так как значение Δx фиксировано. Оно соответствует скачку напряжения на входе АЦП, равному величине младшего разряда АЦП.

В таких условиях форма численной производной не будет иметь ничего общего с реальной зависимостью (рис.6).

Решением этой проблемы является *уменьшение частоты измерений!*

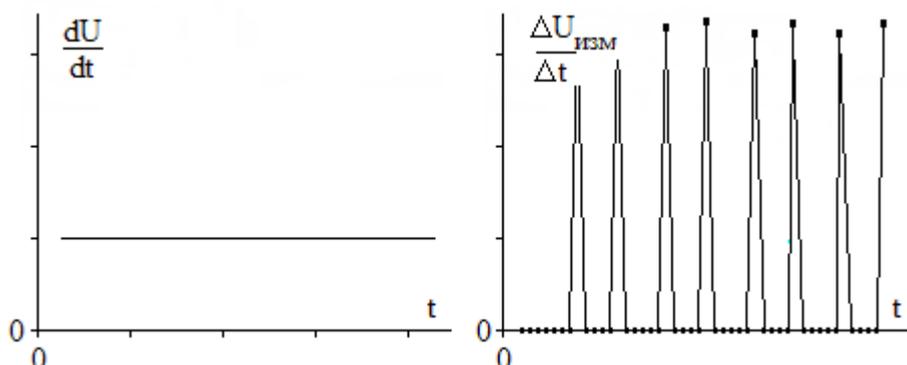


Рис 6. Проблема численного дифференцирования результатов при высокой частоте измерений

Если за время, прошедшее между измерениями, напряжение успеваеет заметно измениться, то ступенек не возникает. Чем больше изменение напряжения за промежуток Δt , тем меньше сказывается точность АЦП на значении численной производной. Правда, брать величину Δt слишком большой также нельзя, поскольку в этом случае отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ будет плохим приближением к $\frac{dx(t)}{dt}$.

Рассмотрим теперь, как влияет на результаты численного дифференцирования второй фактор – шум. Если у нас режим с высокой частотой измерений, и шум вызывает “дрожание” всего лишь в младшем разряде АЦП, на зависимости $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ будут наблюдаться выбросы в положительную и отрицательную области с очень большой амплитудой – по той же причине, что и в случае “ступенек”. Уменьшение частоты измерений и в этом случае улучшает ситуацию. Когда шумовой сигнал не имеет постоянной составляющей, имеется способ дополнительно улучшить результат – использовать усреднение по большому числу измерений (серии измерений). При этом измерения в серии могут быть достаточно высокочастотными, важно только, чтобы напряжение на датчике успело заметно измениться за время между моментами, соответствующими серединам серий.

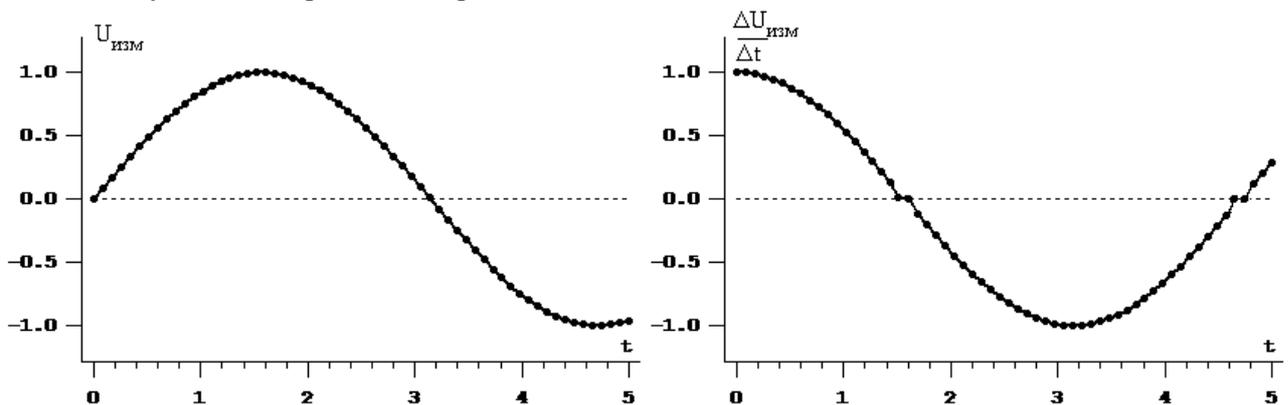


Рис 7. Проблема численного дифференцирования в области экстремумов

Рассмотрим теперь случай синусоидального сигнала. На первый взгляд кажется, что новых проблем при этом не возникает. Но в областях максимумов и минимумов сигнал меняется гораздо медленнее, чем в остальных областях, поэтому условие “медленности” измерений обычно не выполняется. Из-за чего численная производная в этих областях оказывается в точности равной нулю, и на кривой $\frac{\Delta U_{изм}}{\Delta t}$ в области пересечения нуля образуются характерные ступеньки (рис.7). Наиболее надёжный способ борьбы с этой проблемой – повышение точности измерений.

Нахождение $a(t)$ требует второго численного дифференцирования. Мы уже знаем, что даже одно численное дифференцирование приводит к большим проблемам. Очевидно, что после второго численного дифференцирования эти проблемы усугубятся. Например, для $a(t)$ в области нулей $v(t)$, то есть там, где для истинного значения $a(t)$ должен наблюдаться максимум или минимум, из-за плато (рис.7) будет наблюдаться ноль. А рядом с этой точкой (до и после) – возможны выбросы.

2.2. Простейшая теория математического маятника

Математическим маятником называется модель, описывающая систему, состоящую из твердого тела, подвешенного на невесомом нерастяжимом и несжимаемом подвесе (нити либо

стержне) в поле силы тяжести. Причём в рамках этой модели считают, что можно пренебречь размерами твердого тела (т.е. рассматривать его как материальную точку) и сопротивлением воздуха, а точка крепления подвеса неподвижна.

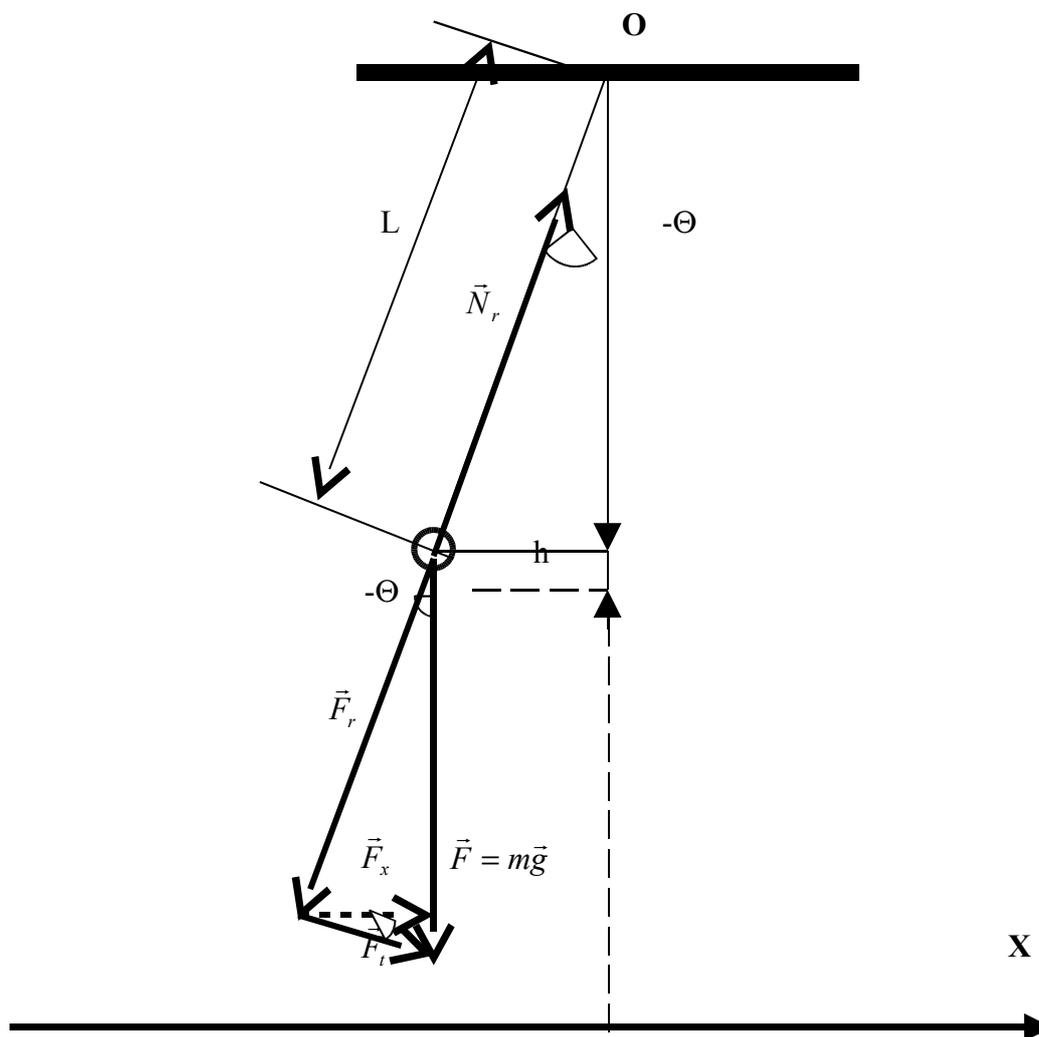


Рис.8. Силы, действующие на математический маятник

Обычно в лабораторных опытах в качестве такого твердого тела используют металлический шар, а длину нити выбирают намного большей, чем радиус шара (рис.8). За длину подвеса L принимают расстояние от точки O подвеса до центра шара. Если же тело имеет другую форму, то за длину подвеса принимают расстояние до центра масс тела.

Параметры груза стараются выбрать такими, чтобы можно было пренебречь как массой нити по сравнению с массой тела, так и сопротивлением воздуха. Кроме того, тело, используемое в качестве груза, должно иметь малые размеры по сравнению с длиной нити, и приближение математического маятника обычно является тем лучшим, чем ближе к центру масс находятся точки тела (более подробно об этом говорится в разделе 2.5).

В данной работе вместо нити используется тонкий металлический стержень. Это позволяет подсоединить к маятнику потенциометр, используемый в качестве датчика угла поворота, а также изучить затухание колебаний при наличии сухого трения.

Рассмотрим, как в отсутствие трения происходит движение математического маятника, если его отклонить на малый угол Θ (углы измеряются в радианах). Угол Θ считаем положительным, если маятник отклонён вправо от положения равновесия.

К телу приложены две силы: сила тяжести \vec{F} и сила реакции нити \vec{N}_r . Разложим силу \vec{F} на радиальную (вдоль направления нити) и тангенциальную (перпендикулярно нити)

составляющие \vec{F}_r и \vec{F}_t , $\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_t$ (Рис.8). Величину тангенциальной составляющей силы тяжести F_t легко вычислить, учитывая, что сила \vec{F}_t перпендикулярна нити (рис.8):

$$F_t = -mg \sin \Theta \quad (3)$$

Рассмотрим движение маятника относительно инерциальной системы отсчета, в которой направление одной из осей мгновенно совпадает с направлением касательной в точке расположения маятника. В этой системе в соответствии со вторым законом Ньютона можно записать

$$\vec{a}_t = \vec{F}_t / m \quad (4),$$

где m - масса маятника, а \vec{a}_t - тангенциальное ускорение.

Поэтому из (3) и (4) находим величину тангенциального ускорения:

$$a_t = -g \sin \Theta \quad (5).$$

Тангенциальное ускорение связано с углом Θ соотношением

$$a_t = L \frac{d^2 \Theta}{dt^2} \quad (6),$$

Обозначив

$$\omega = \sqrt{g/L} \quad (7),$$

получаем уравнение движения

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin \Theta \quad (8).$$

Угол отклонения Θ связан с координатой x соотношением

$$x = L \sin \Theta \quad (9).$$

Если считать, что угол Θ мал, т.е.

$$\sin \Theta \approx \Theta \quad (10),$$

то уравнение движения в угловых координатах будет выглядеть так:

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} = -\omega^2 \Theta \quad (11),$$

а связь координаты x с углом Θ окажется линейной:

$$x = L \Theta \quad (12).$$

При этом уравнение движения в этих координатах будет выглядеть аналогично уравнению (11):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (13).$$

Приближение (10) называется линейным. Более общие формулы (8) и (9) соответствуют нелинейной теории. Она гораздо сложнее, чем линейная, и будет рассмотрена после обсуждения линейной теории.

Решением уравнения (11) является функция

$$\Theta(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad (14)$$

Амплитуда колебаний A и фаза α зависят от начальных условий задачи. Например, если мы отклоним маятник от положения равновесия на угол Θ_0 , а затем отпустим его, то в начальный момент

$$\Theta(0) = \Theta_0, \quad \frac{d\Theta}{dt}(0) = 0 \quad (15)$$

Решением (11) в этом случае будет

$$\Theta = \Theta_0 \cos \omega t \quad (16),$$

Соответственно, при начальных условиях

$$x(0) = x_0, \quad (17),$$

$$dx/dt(0) = 0 \quad (18),$$

решением уравнения (13) будет

$$x = x_0 \cos \omega t \quad (19).$$

Амплитуда колебаний маятника Θ_0 в приближении линейной теории связана с начальным отклонением x_0 соотношением

$$\Theta_0 = x_0 / L \quad (20).$$

Подведём итог: математический маятник в случае малых отклонений совершает гармонические колебания, период которых

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{L/g} \quad (21)$$

не зависит от массы маятника и определяется только его длиной L и ускорением свободного падения g . Такие колебания называются свободными.

2.3. Затухание колебаний под действием сухого трения

Рассмотрим колебания математического маятника в приближении (8) при наличии "сухого" трения. Его характерной особенностью является наличие трения покоя, т.е. ненулевой силы трения при нулевой относительной скорости соприкасающихся поверхностей. Когда внешняя приложенная сила превосходит определенное значение, начинается скольжение. При этом сила сухого трения скольжения пропорциональна силе N нормального давления на опору: $F_{\text{тр}} = kN$, где k - безразмерный коэффициент (меньше единицы), называемый коэффициентом сухого трения скольжения (или просто коэффициентом трения). Обратите внимание на то, что сила сухого трения не зависит ни от площади соприкасающихся поверхностей, ни от скорости движения тела!

Во всех реальных механических системах имеется сила трения, причём в подавляющем большинстве из них присутствует сила сухого трения. Следует отметить, что динамика системы не зависит от причин, вызывающих появление сухого трения (то есть возникает оно в области соприкосновения вала с подставкой, либо в потенциометре, либо ещё по какой-нибудь причине), а зависит только от момента силы этого трения.

Из-за силы трения $F_{\text{мп}}$, действующей в точке соприкосновения вала с подставкой (рис.2) или потенциометре (рис.3), на стержень маятника будет действовать момент силы $M = rF_{\text{мп}}$ относительно оси вращения, направленный вдоль оси вала, где r - расстояние от центра вала до точки приложения силы трения - радиус вала (рис.2) или длина движка потенциометра (рис.3). В результате на груз со стороны стержня будет действовать сила

$$\tilde{F}_{\text{мп}} = F_{\text{мп}} r/L \quad (22).$$

Таким образом, в уравнение (13) надо добавить член

$$f = |\tilde{F}_{\text{мп}}|/m \quad (23),$$

и мы получаем уравнение движения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \pm f \quad (24),$$

где знак "+" берется для нечетных полупериодов, а знак "-" - для четных (при положительном начальном угле отклонения). Поскольку сила трения скольжения не зависит от скорости,

значение f можно считать константой. В этом случае решение уравнения (24) для первого полупериода при начальных условиях (17-18):

$$x(t) = (x_0 - f/\omega^2) \cos \omega t + f/\omega^2 \quad (25)$$

(вывод формулы – в **Приложении 2**). Это смещенная по оси ординат на f/ω^2 косинусоида, причем ее амплитуда меньше координаты начального отклонения на f/ω^2 . Координата маятника после окончания первого полупериода равна

$$x(T_0/2) = -x_0 + 2f/\omega^2 \quad (26)$$

Для второго полупериода

$$x(t) = (x_0 - 3f/\omega^2) \cos \omega t - f/\omega^2 \quad (27)$$

Видно, что и это косинусоида, смещенная на f/ω^2 по оси ординат, но уже вниз, а не вверх, как было для первого полупериода. В конце второго полупериода маятник будет иметь координату

$$x(T_0) = x_0 - 4f/\omega^2 \quad (28)$$

Из (25)-(28) видно, что за каждый полупериод амплитуда колебаний маятника уменьшается на $2f/\omega^2$. Поскольку для всех последующих полупериодов колебаний решения совершенно аналогичны, можно сделать следующий вывод: амплитуда колебаний маятника с "сухим" трением уменьшается за каждое колебание на величину $4f/\omega^2$ (рис.9), а период косинусоид при этом остается неизменным.

Конечно, слово "период" для непериодических процессов использовать, вообще говоря, нельзя. Однако в нашем случае речь идет о периоде участков косинусоид (от очередного максимума до очередного минимума или от очередного минимума до очередного максимума), которые можно представлять как гармонические колебания с периодом T_0 , сдвинутые от нуля на $\pm f/\omega^2$. Интервал координат, попадающих в область между $-f/\omega^2$ и $+f/\omega^2$, называется зоной застоя.

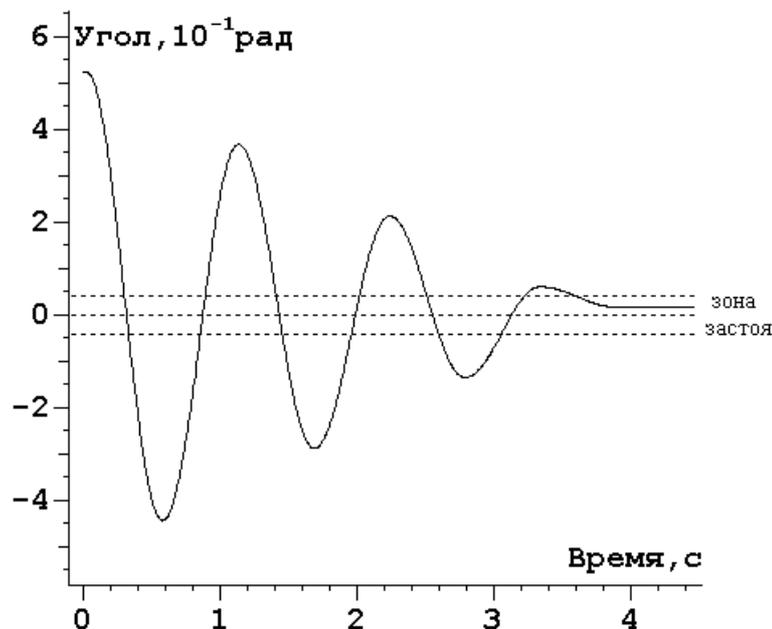


Рис.9. Колебания при наличии сухого трения

Полное прекращение колебаний в случае сухого трения будет происходить за конечное время – колебания кончаются после попадания точки с нулевой скоростью в зону застоя. При этом сила трения скольжения переходит в силу трения покоя, кинетическая энергия маятника равна нулю, а потенциальная энергия может принимать любое значение, соответствующее изменению координат маятника в пределах зоны застоя.

2.4. Затухание колебаний под действием вязкого трения

Силы трения, зависящие от значения скорости движущегося тела, у которых трение покоя отсутствует, называются силами вязкого трения. Характерный пример такой системы – твёрдое тело, движущееся в газовой или жидкой среде. При малых скоростях сила вязкого трения F_{mp} , как правило, пропорциональна скорости движения v :

$$F_{mp} = -k v \quad (29)$$

Обозначим $\gamma = \frac{k}{2m}$, эта величина называется коэффициентом затухания колебаний. Частоту из (7), называемую частотой свободных незатухающих колебаний, обозначим как ω_0 , т.е.

$$\omega_0 = \sqrt{g/L} \quad (30)$$

Тогда вместо (13) надо написать уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (31)$$

Его решение с произвольными начальными условиями – экспоненциально затухающие колебания (рис.10)

$$x(t) = x_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (32)$$

с частотой

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (33)$$

Значения x_1 и ϕ_1 определяются из начальных условий

$$x(0) = x_0 \text{ и } \frac{dx}{dt}(0) = V_0. \quad (34)$$

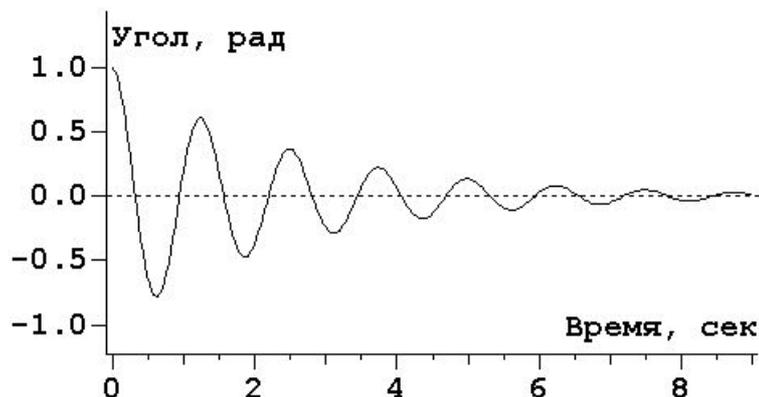


Рис.10. Колебания при наличии вязкого трения

При этом, в отличие от случая сухого трения, колебания никогда полностью не кончаются.

Надо отметить, что чем больше коэффициент вязкого трения γ , тем быстрее затухают колебания. Кроме того, чем больше γ , тем меньше частота ω свободных затухающих колебаний.

Если величина γ равна или превышает ω_0 , колебательное движение становится невозможным.

Такое движение маятника называется аperiodическим, то есть не являющимся периодическим.

При $\gamma > \omega_0$ решением (31) является линейная комбинация двух экспонент:

$$x(t) = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} \quad (35),$$

где
$$\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (36).$$

В случае $\gamma = \omega_0$ решением является $x(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\gamma t}$.

Значения C_1 и C_2 находятся из начальных условий.

2.5. Простейшая теория физического маятника

Физическим маятником называется любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может совершать свободные колебания вокруг неподвижной точки – центра качания. Наиболее просто описывается плоское движение маятника вокруг фиксированной оси, называемой осью вращения - рис.11.

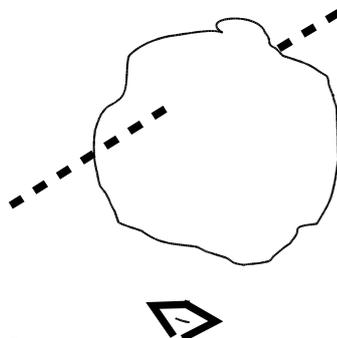


Рис.11. Физический маятник и ось вращения

В том случае, если маятник совершает несколько десятков колебаний без заметного затухания, моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь, и уравнение движения маятника записывается в виде

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{M_{возвр}}{J} \quad (37)$$

где J - момент инерции маятника относительно оси вращения, Θ - угол отклонения маятника от положения равновесия, $d^2\Theta/dt^2$ - угловое ускорение; t - время, $M_{возвр}$ - проекция полного момента возвращающей силы на направление оси вращения.

В лабораторной работе в качестве физического маятника используется груз относительно большого размера, закреплённый на тонком однородном металлическом стержне массой m_{cm} и длиной l . Обозначим как L расстояние от оси вращения (центра вала) до центра груза. Момент инерции J относительно оси вращения складывается из момента инерции груза $J_{груза}$, момента инерции стержня $J_{стержня}$ и момента инерции вала и узла закрепления маятника $J_{вала}$. Полезно иметь в виду, что относительно этой оси момент инерции тонкого стержня длиной l , подвешенного за один конец, составляет $\frac{1}{3} m_{cm} l^2$.

Оценим порядок величин для маятника, используемого в данной работе. Пусть масса груза 200 г, масса стержня 70 г, длина подвеса равна длине стержня и составляет 50 см, характерное расстояние элементов узла крепления от оси вращения 1 см, масса 10 г.

Имеем: $J_{груза} = mL^2 = 0.2 * 0.5^2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_{стержня} = \frac{1}{3} m_{cm} l^2 = 1/3 * 0.07 * 0.5^2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_{вала} \approx 0.01 * 0.01^2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 = 10^{-6} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

Видно, что вкладом узла крепления в момент инерции системы можно пренебречь.

Момент возвращающей силы для груза вычисляется по формуле

$$\vec{M}_{груза} = \vec{L} \times m\vec{g} \quad (38),$$

где радиус-вектор \vec{L} направлен от точки подвеса к центру масс груза. Его проекция на ось вращения равна

$$M_{груза} = LF_t = -mg \sin \Theta \cdot L \quad (39)$$

- см. формулу (3). Момент возвращающей силы для стержня вычисляется аналогично с учётом того, что вместо массы груза m следует подставить массу стержня m_{cm} , а вместо расстояния L от оси вращения до центра масс груза следует взять расстояние от оси вращения до центра масс стержня, которое равно $l/2$. Вклад узла крепления во вращающий момент равен нулю, так как узел находится в состоянии безразличного равновесия. Тогда

$$J = J_{груза} + J_{стержня} = mL^2 + \frac{1}{3} m_{cm} l^2, \quad (40)$$

$$M_{возвр} = M_{груза} + M_{стержня} = -mgL \sin \Theta - m_{cm} g \frac{l}{2} \sin \Theta \quad (41)$$

Таким образом, получаем уравнение движения исследуемого маятника:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin \Theta, \quad (42)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} \frac{1 + \frac{m_{cm} l}{2mL}}{1 + \frac{m_{cm} l^2}{3mL^2}}} \quad (43)$$

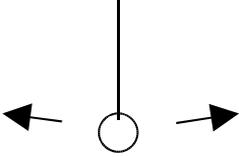
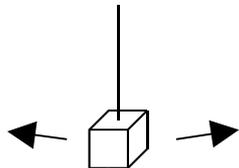
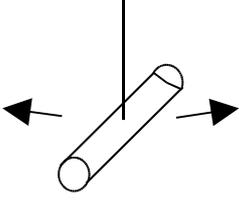
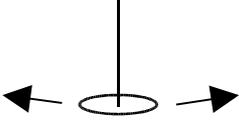
Таким образом, уравнение (42) совпадает с уравнением (8) для математического маятника, но соответствует другой частоте колебаний. При больших значениях m и L , а также малых значениях m_{cm} и l частота и период колебаний мало отличаются от соответствующих значений для математического маятника. При этом отличие может быть как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения частоты в зависимости от соотношения m_{cm}/m и l/L .

Рассмотрим теперь влияние формы груза на колебания маятника. По теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции груза относительно оси вращения равен сумме mL^2 и момента инерции груза $J_{цм}$ относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси вращения.

Таким образом, если груз не является точечным,

$$J_{\text{груза}} = mL^2 + J_{\text{цм}} \quad (44)$$

Приведем момент инерции некоторых тел относительно их центра масс:

Тело	Изображение тела, подвешенного на нити	Момент инерции $J_{цм}$
Шар радиуса r		$\frac{2}{5}mr^2$
Куб со стороной $a=2r$ (любое расположение относительно оси вращения)		$\frac{1}{6}ma^2 = \frac{2}{3}mr^2$
Цилиндр радиуса r , ось цилиндра параллельна оси вращения - в том числе плоский диск или тонкий длинный цилиндр		$\frac{1}{2}mr^2$
Тонкий диск малого радиуса r , нить подвеса проходит через ось симметрии диска (ось вращения параллельна плоскости диска)		$\frac{1}{4}mr^2$

Физический и математический маятники динамически эквивалентны, так как описываются одним и тем же дифференциальным уравнением. Из (7) следует, что период колебаний математического маятника определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (45)$$

где L - длина математического маятника. Если ввести обозначение

$$L_{np} = L \frac{1 + \frac{m_{cm} l^2}{3mL^2}}{1 + \frac{m_{cm} l}{2mL}}, \quad (46)$$

то период колебаний, соответствующий частоте (43), преобразуется к виду

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_{np}}{g}} \quad (47)$$

Формула (47) по форме совпадает с (45), где вместо длины маятника L используется L_{np} . Величину L_{np} называют приведенной длиной физического маятника. Если в качестве физического маятника рассматривается не груз на стержне, а колеблющееся тело другой формы, то формула для L_{np} будет отличаться от (46). В общем случае верна формула

$$L_{np} = L_{cm} + \frac{J_{cm}}{mL_{cm}}, \quad (48)$$

где L_{cm} - расстояние от оси вращения до центра масс физического маятника, а m - масса этого маятника. При этом мы уже не разделяем физический маятник на “груз” и “стержень”. Отметим, что в выражение кинетической энергии входит полный момент инерции физического маятника относительно оси вращения :

$$E = \frac{1}{2} J \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 \quad (49)$$

Для исследуемого маятника момент инерции описывается формулой (40).

2.6. Фазовая диаграмма

Состояние колеблющегося маятника в каждый момент времени можно однозначно охарактеризовать координатой x его центра масс и импульсом $p=mv$, где $v = \frac{dx}{dt}$. В механике принято изображать состояние таких систем точкой в фазовом пространстве - пространстве обобщенных координат и обобщенных импульсов. Для маятника, характеризуемого одной степенью свободы (в нашем случае x), фазовое пространство является плоскостью с координатами x и p . При движении маятника точка, характеризующая состояние маятника, непрерывно меняет положение на фазовой плоскости, описывая некоторую кривую, называемую фазовой траекторией. В случае отсутствия трения из закона сохранения энергии нетрудно получить, что эта траектория для колеблющегося математического маятника представляет собой эллипс, площадь S которого равна

$$S = \pi m \omega_0^2 x_0^2 \quad (50)$$

Площадь, ограниченная фазовой траекторией системы, имеет размерность действия. Полная механическая энергия маятника E выражается формулой

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \quad (51)$$

Из (50) и (51) получаем

$$S = \frac{2\pi}{\omega_0} E = T E \quad (52)$$

Таким образом, площадь эллипса S пропорциональна полной механической энергии маятника E , и коэффициентом пропорциональности служит период колебаний T .

Обычно проще измерять скорость, а не импульс. Но, поскольку $p=mv$, а масса маятника является постоянной величиной, в нашем случае зависимость скорости от координаты будет воспроизводить форму фазовой диаграммы. Аналогично, если в качестве обобщенной координаты выступает угол, то в качестве величины, пропорциональной обобщенному импульсу, можно использовать угловую скорость.

При наличии трения амплитуда колебаний и максимальный импульс маятника с каждым периодом убывают, поэтому фазовая траектория перестает быть замкнутой – это сходящаяся к центру спираль. В случае сухого трения расстояние между витками спирали постоянно

(рис.12а). В случае же вязкого трения расстояние между витками постоянно уменьшается (рис.12б).

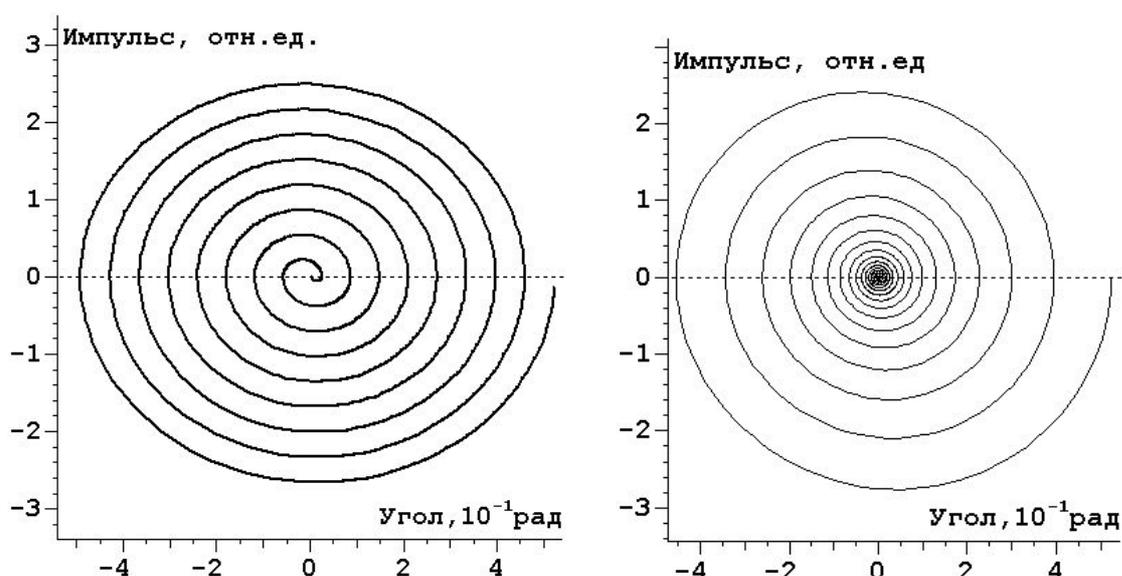


Рис.12. Фазовая диаграмма при наличии а) сухого, б) вязкого трения

При большой амплитуде колебания становятся существенно нелинейными, и фазовая траектория перестает быть эллиптической. С помощью моделирующей программы легко посмотреть, какую форму имеет фазовая траектория для различных углов отклонения.

2.7. Нелинейности при большой амплитуде колебаний

В случае больших амплитуд условие (10) не выполняется, и погрешность определения периода колебаний физического маятника по формуле (47) велика.

Зависимость периода колебаний T от их амплитуды Θ_0 с точностью до членов порядка Θ_0^2 может быть записана как:

$$T = 2\pi \sqrt{L_{np} / g} \left(1 + \frac{\Theta_0^2}{16} + \dots \right) \quad (53)$$

Вывод этой формулы приведён в **Приложении 1**. В первом приближении период не зависит от Θ_0 . В следующем – зависит, но слабо, так как член ряда, пропорциональный Θ_0 , отсутствует. Если обозначить период, полученный на основе простейшей теории, за T_0 , то

$$T_0 = 2\pi \sqrt{L_{np} / g} \quad (55),$$

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\Theta_0^2}{16} + \dots \right) \quad (56)$$

При достаточно точных измерениях можно обнаружить зависимость периода колебаний от их амплитуды даже в случае малой амплитуды.

Оценим погрешность линейной теории. Для $\Theta_0 = \pi / 4$ (угол 45°), который можно считать “малым” весьма условно (с неточностью выполнения равенства (10) около 10%), относительная погрешность, связанная с амплитудной зависимостью периода, составит примерно $\frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \approx 0.04$, т.е. 4%. Это достаточно много, чтобы заметить зависимость периода колебаний

от амплитуды даже с помощью не слишком точных измерительных приборов. Если $\Theta_0 = \pi / 6$ (угол 30°), то погрешность уже менее 2%. При $\Theta_0 = \pi / 12$ (угол 15°) погрешность уменьшается до 0.4%, и нужны весьма точные измерения, чтобы обнаружить отклонения от линейной теории. При меньших углах на периоде в большей степени, чем амплитудная

зависимость, обычно сказываются другие факторы "неидеальности": трение, растяжимость нити, дрожание точки подвеса и т.д.

3. Контрольные вопросы

1. Почему на экспериментально измеряемых зависимостях $\Theta(t)$ вблизи точек поворота могут наблюдаться плоские участки? Назовите две причины для используемой экспериментальной установки.
2. Что такое математический маятник? Дайте определение.
3. Почему сила натяжения нити (упругости стержня) не входит в уравнение движения маятника?
4. Зависит ли в отсутствие трения период колебаний математического маятника от массы груза?
5. Как выглядит выражение для полной энергии математического маятника в произвольной точке траектории?
6. Что такое зона застоя? При каком виде трения она возникает?
7. По какому закону происходит уменьшение амплитуды колебаний в случае сухого трения? Вязкого трения?
8. Чему равна полная энергия маятника при остановке в зоне застоя?
9. В каком случае движение маятника становится аperiodическим?
10. Какие отклонения можно считать малыми? Почему?
11. Что такое физический маятник? Дайте определение.
12. Что такое центр качания физического маятника? Ось вращения?
13. От чего зависит период колебаний физического маятника?
14. Во сколько раз отличаются период колебаний физического маятника с приведённой длиной L_1 и период колебаний математического маятника с длиной подвеса L_2 ?
15. Как влияет на период колебаний наличие массы у стержня, на котором закреплен груз?
16. На какой параметр, входящий в уравнение движения физического маятника, влияет форма груза заданной массы? Как это влияние сказывается на периоде колебаний?
17. Как выглядит выражение для полной энергии физического маятника в произвольной точке траектории?
18. Как выглядит фазовая траектория маятника в отсутствие трения? При наличии сухого трения? При наличии вязкого трения?
19. Зависит ли период колебаний физического маятника от амплитуды колебаний? Если да, то как?
20. Почему при больших углах отклонения форма зависимости $x(t)$ меньше отличается от синусоиды, чем $v_x(t)$, а $v(t)$ меньше отличается от синусоиды, чем $a_x(t)$?
21. Почему при больших углах отклонения форма зависимостей $x(t)$, $v_x(t)$, $a_x(t)$ больше отличается от синусоиды, чем для соответствующих им зависимостей $\Theta(t)$, $d\Theta/dt$, $d^2\Theta/dt^2$?

4. Порядок выполнения работы

Для выполнения работы запустите программу управления лабораторной работой. Программа работает под управлением интегрированной среды BARSIC. Имена исполняемых файлов среды имеют расширение .brs. Если на рабочем столе (Desktop) имеется ярлык с названием "Исследование маятника", для запуска программы достаточно сделать на нем двойной щелчок.

Задание 1. Моделирование колебаний маятника

Исследуйте зависимости угла, угловой скорости и углового ускорения от времени для различных начальных углов отклонений. Затем проверьте, как будут выглядеть зависимости x

(t) , $v(t)$, $a(t)$. Установите, при каких максимальных углах отклонения угловые зависимости и зависимости $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ по форме начинают сильно отличаться от синусоидальных. Занесите результаты в отчёт (пункт меню “Отчёт”) – напишите значения углов и краткие комментарии, поясняющие причину отличия.

Задание 2. Измерение углов с помощью АЦП. Цифровой осциллограф

а) Проведите серию измерений с помощью АЦП (кнопка “Серия измерений АЦП”). По таблице и графику оцените, с какой точностью с его помощью можно измерять напряжение.

б) Чуть качните маятник, остановите его, отпустите, подождите, когда он остановится, и проведите серию измерений. Затем качните маятник в другую, остановите его, отпустите, подождите, когда он остановится, и проведите новую серию измерений.

При этом будет выведено значение напряжения, соответствующего положению равновесия. Оцените погрешность измерения нулевого угла и выясните, связано ли измеренное изменение “нуля” с наличием зоны застоя, или оно определяется погрешностями электронной части установки.

в) Кнопкой “V0” можно запустить процедуру выставления нуля по серии измерений при измерении угла. При этом показывается напряжение V_0 , соответствующее нулевому углу. Оцените погрешность выставления нуля по серии измерений, связанную с погрешностями измерительной аппаратуры, и погрешность, связанную с особенностями исследуемой механической системы.

г) Качните маятник и нажмите кнопку “Цифровой осциллограф”. Остановите маятник и медленно отклоните его рукой. Наблюдайте движение “луча” цифрового осциллографа при этих действиях. Оцените пределы изменения напряжения при движении маятника. Остановка измерений производится кнопкой “Стоп”.

д) Отклоните маятник примерно на 45 градусов и измерьте напряжение, соответствующее этому углу. Оцените коэффициент пересчёта из напряжения в углы.

Занесите результаты в отчёт

Задание 3. Измерение $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$

Оцените погрешность измерения x, v, a . Объясните причины их возникновения. Занесите результаты в отчёт.

Задание 4. Изучение трения (измерение зависимости амплитуды колебаний от времени)

- Достаточно сильно отклоните маятник и проведите измерение зависимости амплитуды колебаний от времени вплоть до полного затухания колебаний. Измерения провести при положении груза, указанном преподавателем.
- Проверьте, является ли трение сухим или вязким, т.е. линейно или экспоненциально затухает амплитуда колебаний.
- Если трение сухое, то выясните, зависит ли сила трения от веса груза, т.е. связано ли трение с прижимом пружины в потенциометре или же оно определяется силой реакции опоры в области точки подвеса маятника. Определите коэффициент трения.
- Если трение не является сухим, проверьте, является ли трение вязким, когда амплитуда колебаний затухает экспоненциально по времени, или же наблюдается смешанный случай, когда присутствует и вязкое и сухое трение одновременно. Если это окажется возможным, определите коэффициент затухания.
- Проведите аналогичные измерения при наличии “паруса”
- Введите все найденные параметры в соответствующий пункт отчёта.

Задание 5. Исследование фазовой диаграммы

- Установите достаточно большое время измерений.

- Установите маятник в положение равновесия и запустите измерения. После начала измерений отклоните маятник на достаточно большой угол и отпустите. После окончания измерений выйдите в окно просмотра фазовой диаграммы. Объясните наблюдаемую зависимость.
- Проведите измерения фазовой диаграммы при различных длинах маятника L . Объясните наблюдаемые зависимости.
- Проведите аналогичные измерения при наличии “паруса”
- Занесите результаты в отчёт

Задание 6. Измерение зависимости периода от длины подвеса

- Выберите оптимальное время измерения.
- Проведите серию измерений: найдите зависимость периода колебаний от длины маятника L .
- Сравните ее с теоретической для математического маятника.
- Сравните экспериментальную зависимость $T(L)$ с теоретической для физического маятника. При этом требуется задать или подобрать параметры, соответствующие исследуемому маятнику.
- Проверьте, будет ли квадрат периода колебаний пропорционален L
- Проверьте, можно ли пренебречь массой стержня, на котором подвешен груз.
- Оцените влияние этой массы на результаты измерений.
- Зависит ли степень этого влияния от длины L ?
- Если зависит, то каким образом?
- Можно ли по наклону зависимости $T^2(L)$ определить значение g ?
- Занесите параметры маятника, использовавшиеся для расчётов, и ответы на вопросы в отчёт.

Задание 7. Измерение зависимости периода колебаний от их амплитуды

- Установите длину подвеса близкой к максимальной.
- Отклоните маятник на достаточно большой угол и проведите измерение зависимости угла отклонения от времени вплоть до полного затухания колебаний. Оцените время, за которое колебания полностью затухнут, а затем установите несколько большее значение в пункт “Время измерений”.
- Отклоните маятник на тот же угол и проведите измерение зависимости угла отклонения от времени вплоть до полного затухания колебаний.
- Подберите правильное значение T_0 для теоретической кривой.
- Сравните экспериментально полученную кривую с теоретической. Объясните результаты.
- Наблюдается ли при больших углах отклонение от первого приближения нелинейной теории? Если “да”, то при каких?
- Занесите результаты (значения L , максимального угла, T_0 , а также ваши выводы) в отчёт.

Приложение 1

Найдем выражение для периода колебаний, описываемых уравнением (8) с начальными условиями (15), в следующем порядке малости по сравнению с линейной теорией. В этом случае (8) может быть переписано в виде

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \left(\Theta - \frac{1}{3!} \Theta^3 \right) \quad (\text{П 1-1}).$$

Если член с Θ^3 рассматривать как малую поправку, то решение (П 1-1) будет близко к (16). Из физических соображений очевидно, что решение будет периодически, но частота колебаний ω может несколько отличаться от ω_0 . Кроме того, в решении кроме первой гармоники будут присутствовать и более высокие. Легко убедиться, что член со второй гармоникой не возникает,

т.к. в правой части (П 1-1) отсутствует слагаемое с Θ^2 . Поэтому будет присутствовать только третья гармоника:

$$\Theta = \Theta_0 \cos \omega t + \lambda \Theta_0 \cos 3\omega t \quad (\text{П 1-2}).$$

где λ - малый параметр. Фаза косинусоид выбрана в соответствии с условием $\frac{d\Theta}{dt}(0) = 0$.

Подставляя (П 1-2) в (П 1-1) и приравнявая коэффициенты перед соответствующими гармониками, получаем

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{8} \Theta_0^2\right), \quad (\text{П 1-3})$$

т.е.
$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} \Theta_0^2\right), \quad (\text{П 1-4})$$

или, окончательно,
$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \Theta_0^2\right) \quad (\text{П 1-5})$$

Точное выражение для периода колебаний, описываемых уравнением (8) с начальными условиями (15) проще всего найти на основе закона сохранения энергии.

Как показано на рис.8, при отклонении маятника на угол Θ от положения равновесия он поднимается на высоту h относительно положения равновесия:

$$h = L - L \cos \Theta. \quad (\text{П 1-6})$$

Положим потенциальную энергию в нижней точке траектории (при $\Theta = 0$) равной нулю, тогда в произвольный момент времени движения маятника его потенциальная энергия $E_{\text{п}} = mgh$, кинетическая: $E_{\text{к}} = mv^2 / 2$,

где v - скорость маятника.

В верхней точке траектории маятника он отклоняется на угол Θ_0 и поднимается на высоту $h_0 = L(1 - \cos \Theta_0)$. В этой точке кинетическая энергия $E_{\text{к}}$ равна нулю, и полная энергия системы E равна потенциальной:

$$E = mgL(1 - \cos \Theta_0) \quad (\text{П 1-7}).$$

В произвольной точке траектории, на основании закона сохранения энергии:

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = mgL(1 - \cos \Theta) + mv^2 / 2 \quad (\text{П 1-8}).$$

Приравнявая (П 1-7) и (П 1-8), получаем:

$$mgL(1 - \cos \Theta) + mv^2 / 2 = mgL(1 - \cos \Theta_0) \quad (\text{П 1-9}).$$

Тогда можно выразить v через другие величины:

$$v(\Theta) = \sqrt{2gL(\cos \Theta - \cos \Theta_0)} \quad (\text{П 1-10}).$$

За четверть периода угол отклонения маятника изменяется от Θ_0 до 0.

Поскольку $v = L d\Theta / dt$, можно вычислить время, необходимое маятнику для изменения угла отклонения на dL :

$$dt = L / v(\Theta) d\Theta \quad (\text{П 1-11}).$$

Проинтегрируем (П 1-11) за 1/4 периода:

$$\int_0^{T/4} dt = \int_0^{\Theta_0} L / \sqrt{2gL(\cos \Theta - \cos \Theta_0)} d\Theta \quad (\text{П 1-12})$$

Из (П 1-12) получаем искомую зависимость T от Θ_0 :

$$T = 4\sqrt{L/g} \int_0^{\Theta_0} d\Theta / \sqrt{2(\cos \Theta - \cos \Theta_0)} \quad (\text{П 1-13}).$$

Если угол Θ_0 мал, то мал и угол Θ , и подынтегральное выражение можно разложить в ряд по малым параметрам Θ и Θ_0 . После интегрирования получим то же, что в (П 1-5):

$$T = 2\pi \sqrt{L/g} \left(1 + \frac{\Theta_0^2}{16} + \dots\right) \quad (\text{П 1-14}).$$

Приложение 2

Рассмотрим сначала решение для первого полупериода колебаний, тогда уравнение (24) примет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x - f \quad (\text{П 2-1})$$

Сделаем замену переменной, обозначив

$$y = x - f / \omega^2$$

Тогда (П 2-1) примет вид

$$d^2 y / dt^2 = -\omega^2 y \quad (\text{П 2-2})$$

с начальными условиями

$$y(0) = x_0 - f / \omega^2$$

$$y'(0) = 0$$

Мы уже знаем решение (П 2-2) с такими начальными условиями:

$$y(t) = y(0) \cos \omega t$$

Таким образом, для первого полупериода $x(t) = (x_0 - f / \omega^2) \cos \omega t + f / \omega^2$.

Видно, что это обычная косинусоида, сдвинутая по оси ординат на f / ω^2 . Окончание первого полупериода определяется из условия равенства нулю скорости dx / dt (первый после нуля корень уравнения):

$$-(x_0 - f / \omega^2) \omega \sin \omega t = 0$$

Очевидно, что это момент времени $t = T_0 / 2$, т.е. период колебаний при действии сил "сухого" трения не изменяется. Координаты маятника после окончания первого полупериода

$$x(T_0 / 2) = -x_0 + 2f / \omega^2$$

Для второго полупериода уравнение (24) имеет вид

$$d^2 x / dt^2 = -\omega^2 x + f \quad (\text{П 2-3})$$

Замена переменной

$$z = x + f / \omega^2$$

приводит его к виду

$$d^2 z / dt^2 = -\omega^2 z$$

Значения координаты и скорости маятника в конце первого полупериода являются начальными условиями для второго полупериода:

$$z(T_0 / 2) = x(T_0 / 2) + f / \omega^2$$

$$dz / dt(T_0 / 2) = 0$$

Решение (П 2-3) с такими условия :

$$z(t) = z(T_0 / 2) \cos(\omega(t - T_0 / 2))$$

что дает

$$x(t) = (x_0(T_0 / 2) + f / \omega^2) \cos \omega(t - T_0 / 2) - f / \omega^2,$$

т.е.

$$x(t) = (x_0 - 3f / \omega^2) \cos \omega t - f / \omega^2 \quad (\text{П 2-4})$$

Видно, что и это косинусоида, смещенная на f / ω^2 по оси ординат, но уже вниз, а не вверх, как было для первого полупериода. Из (П 2-4) получаем, что в конце второго полупериода маятник будет иметь координату

$$x(T_0) = x_0 - 4f / \omega^2.$$

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.1 "Механика". -М., Наука, 1979.-520 с.

2. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1 “Механика. Молекулярная физика”. –М., Наука, 1987.- 432 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.1 “Механика”. –М., Наука, 1988.-216 с.

Об аппаратуре и программном обеспечении

В данной работе используется блок автоматизации ЛА-2USB14 фирмы ЗАО «РУДНЕВ-ШИЛЯЕВ» <http://www.rudshel.ru> (Внешнее устройство аналого-цифрового преобразования <http://www.centeradc.ru/katalog/index-p01.htm>). Он предназначен для использования на промышленных предприятиях и в научных лабораториях. Его краткие характеристики:

1. АНАЛОГО-ЦИФРОВОЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ. Число аналоговых входов 32 однополюсных / 16 дифференциальных. Разрешение 12 бит. Время преобразования 2 мкс. Максимальная частота дискретизации 500 кГц. Входное сопротивление не менее 5 МОм. Защита по напряжению аналоговых входов ± 15 В. Диапазоны входного напряжения ± 10.0 В; ± 5.0 В; ± 2.5 В; ± 1.0 В; ± 0.5 В; ± 0.25 В; ± 0.1 В; ± 0.05 В.
2. ЦИФРО-АНАЛОГОВЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ. Количество каналов 2. Диапазоны выходных сигналов ± 5 В. Разрешение 14 бит (0.61 мВ). Время установления 20 мкс. Сопротивление нагрузки не менее 1 кОм.
3. ЦИФРОВОЙ ПОРТ. Число линий 8 ввода / 8 вывода.

Программа управления компьютеризированной установкой написана на языке программирования BARSIC.

WWW-страница среды BARSIC: http://www.niif.spbu.ru/~monakhov/www/applicat_r.html

Обращение из BARSIC к драйверу, поставляемому с блоком автоматизации ЛА-2USB14, осуществляется через промежуточную динамическую библиотеку (DLL), написанную на языке Object PASCAL и скомпилированную в среде Delphi.

Координаты для связи:

Е-mail: v.v.monahov@mail.ru

Телефон: +7-(812)-428-45-33 Монахов Вадим Валериевич, к.ф.-м.н., доцент физического факультета СПбГУ

Факс: +7-(812)-428-72-40 -с пометкой: Монахову В.В.

Почтовый адрес: 198504, СПб, ул.Ульяновская, д.1, НИИ Физики, Монахову В.В.