Введение в информатику

Е. А. Яревский

физический факультет
СПбГУ

2022

ЛЕКЦИЯ 3

Логика (и арифметика)

Алгебра логики

Логические операции, основа построения цифровых автоматов, в том числе ЭВМ
Это раздел математической логики
Создатель: **Джордж Буль** (1815-1864)
(названия: булева логика, булева алгебра)

Булевой алгеброй называется непустое множество A с двумя бинарными операциями $\cap$ (И, конъюнкция), $\cup$(ИЛИ, дизъюнкция), унарной операцией $\bar{\ }$ (НЕ, отрицание) и двумя выделенными элементами: 0 (Ложь) и 1 (Истина) такими, что для всех a, b и c из множества A верны следующие **аксиомы**:

$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$; $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$ ассоциативность

$a \cup b = b \cup a$; $a \cap b = b \cap a$ коммутативность

$a \cup (a \cap b) = a$; $a \cap (a \cup b) = a$ законы поглощения

$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$; $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ дистрибутивность

$a \cup \bar{a} = 1$; $a \cap \bar{a} = 0$ дополнительность

Из этих аксиом следуют многие свойства, например:

$a \cup 0 = a$; $a \cap 0 = 0$

$a \cup 1 = 1$; $a \cap 1 = a$

$a \cup a = a$; $a \cap a = a$

$\bar{0} = 1$; $\bar{1} = 0$

Булева алгебра может содержать разное количество элементов. Самая простая нетривиальная булева алгебра состоит только из 0 и 1.

Она является моделью классического **исчисления высказываний**.

Основное понятие АЛ: высказывание

Высказывание – некоторое предложение, о котором можно утверждать, что оно либо **истинно** либо **ложно**.

Земля – планета солнечной системы

На улице идет дождь.

Высказывание 'x' истинно: (И) (Т) (true) (1)

Высказывание 'x' ложно: (Л) (F) (false) (0)

Логическая (булева) переменная – величина 'x', которая принимает только два значения: {0,1}.

Логическая функция $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ – функция, принимающая значения 0 или 1 на наборе логических переменных $x_1, x_2, \dots x_n$.

Логические функции одной переменной (4 функции):

x	F1	F2	F3	F4
0	1	0	0	1
1	1	0	1	0

F1 – абсолютная истина
F2 – абсолютная ложь
F3 – тождественная функция
F4 – логическое отрицание (НЕ, NOT, $\bar{x}$)

Логические функции двух переменных (16 функций):

(x_1 x_2)

00	01	10	11	
0	0	0	1	конъюнкция, И
0	1	1	1	дизъюнкция, ИЛИ
0	1	1	0	сложение по модулю 2, исключающее ИЛИ

И: $x_1 \& x_2 = x_1 x_2 = x_1 \cap x_2$

ИЛИ: $x_1 + x_2 = x_1 \cup x_2$

Искл. ИЛИ: $x_1 \oplus x_2$

Логические функции **n** переменных: всего N = ? функций.

Логические функции f1, f2 равносильны, если для любых $x_1 \dots x_n$ выполнено:

$$f1(x_1,x_2, \dots x_n) = f2(x_1,x_2, \dots x_n).$$

Представления логических функций:

табличные, синтаксические, алгоритмические....

Теорема Жигалкина:
(алгебраическая нормальная форма, АНФ)

Любая булева функция может быть представлена многочленом вида:

$$f(x_1, \ldots x_n) = k_0 \oplus k_1 x_1 \oplus k_2 x_2 \oplus \ldots \oplus k_n x_n \oplus$$

$$k_{n+1} x_1 x_2 \oplus k_{n+2} x_1 x_3 \oplus \ldots$$

$$k_{n+m} x_1 x_2 x_3 \ldots x_n,$$

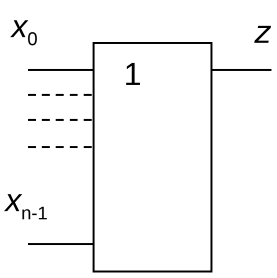
где $k_i = \{0,1\}$.

<u>Примеры:</u>

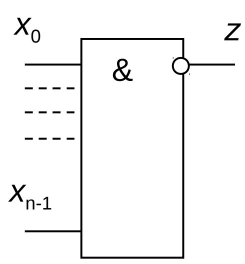
$x_1 + x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$

$\overline{x} = 1 \oplus x$

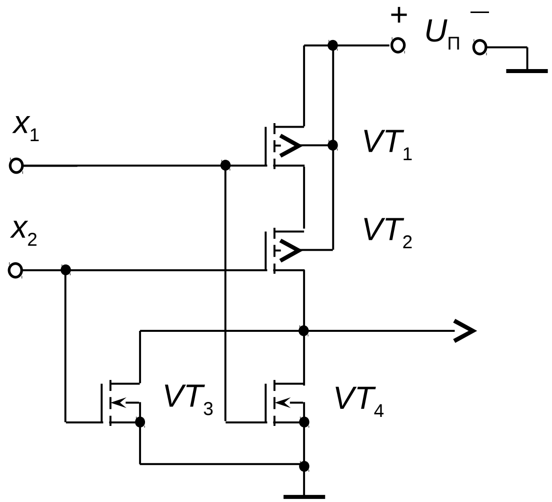
Техническая реализация лог. функций: **Логические элементы**



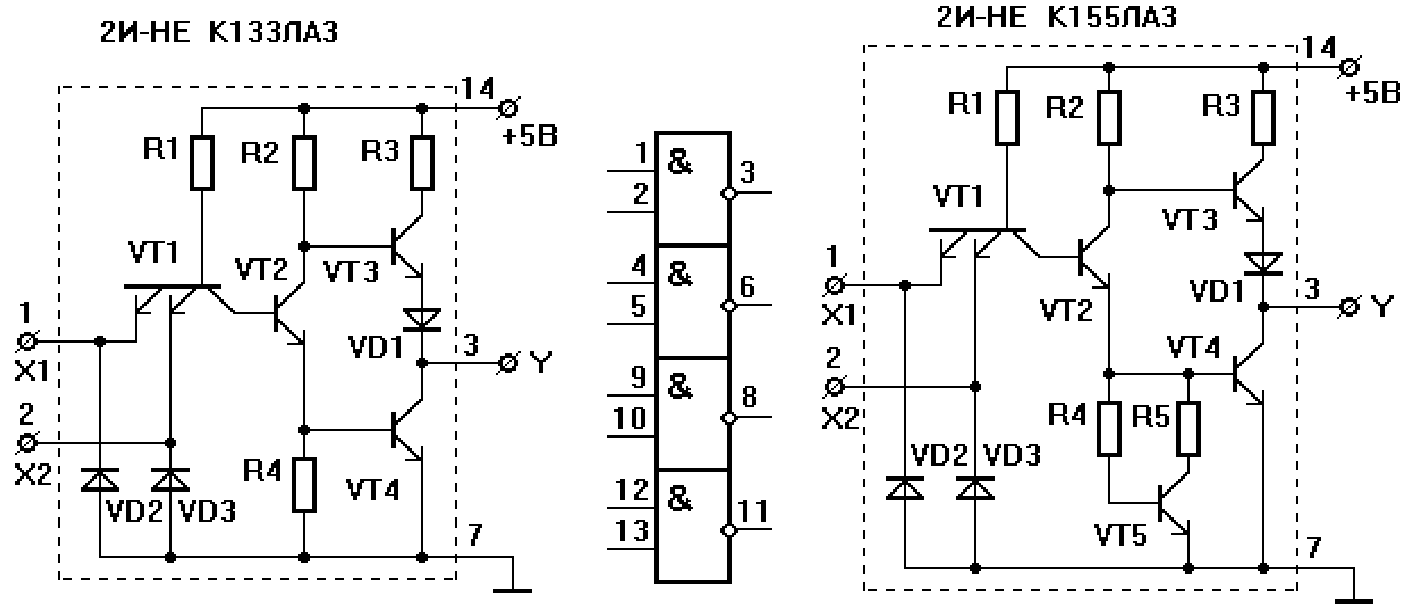
ИЛИ



И-НЕ



Элемент 2ИЛИ-НЕ
на КМОП транзисторах



а) б) в)

Рис. 1.15

Элементы 2И-НЕ на биполярных транзисторах

КМОП (Комплементарная структура Металл-Оксид-Полупроводник)
CMOS (Complementary Metal-Oxide-Semiconductor)

Связь логических и арифметических операций в двоичной системе отсчета

Битовые переменные x и y

Умножение:
$z = x \,\&\, y$

Сложение (двоичный полусумматор):
$z = x \oplus y$ (результат)
$p = x \,\&\, y$ (перенос)

Многоразрядное сложение:
$z = x+y$
x_i, y_i, z_i, p_i

$z_i = (x_i \oplus y_i) \oplus p_{i-1}$
$p_i = (x_i \,\&\, y_i) + ((x_i \oplus y_i) \,\&\, p_{i-1}))$

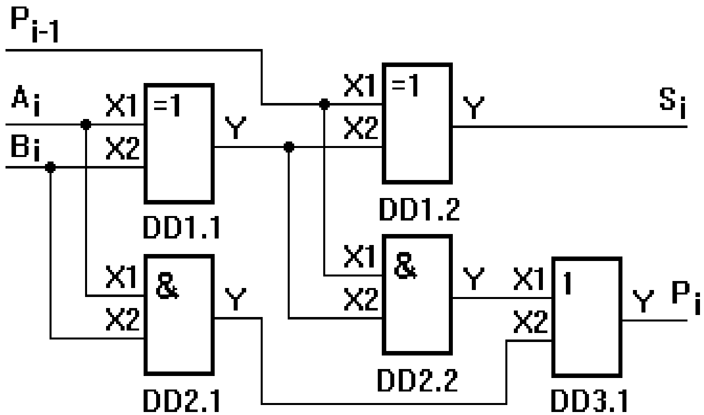
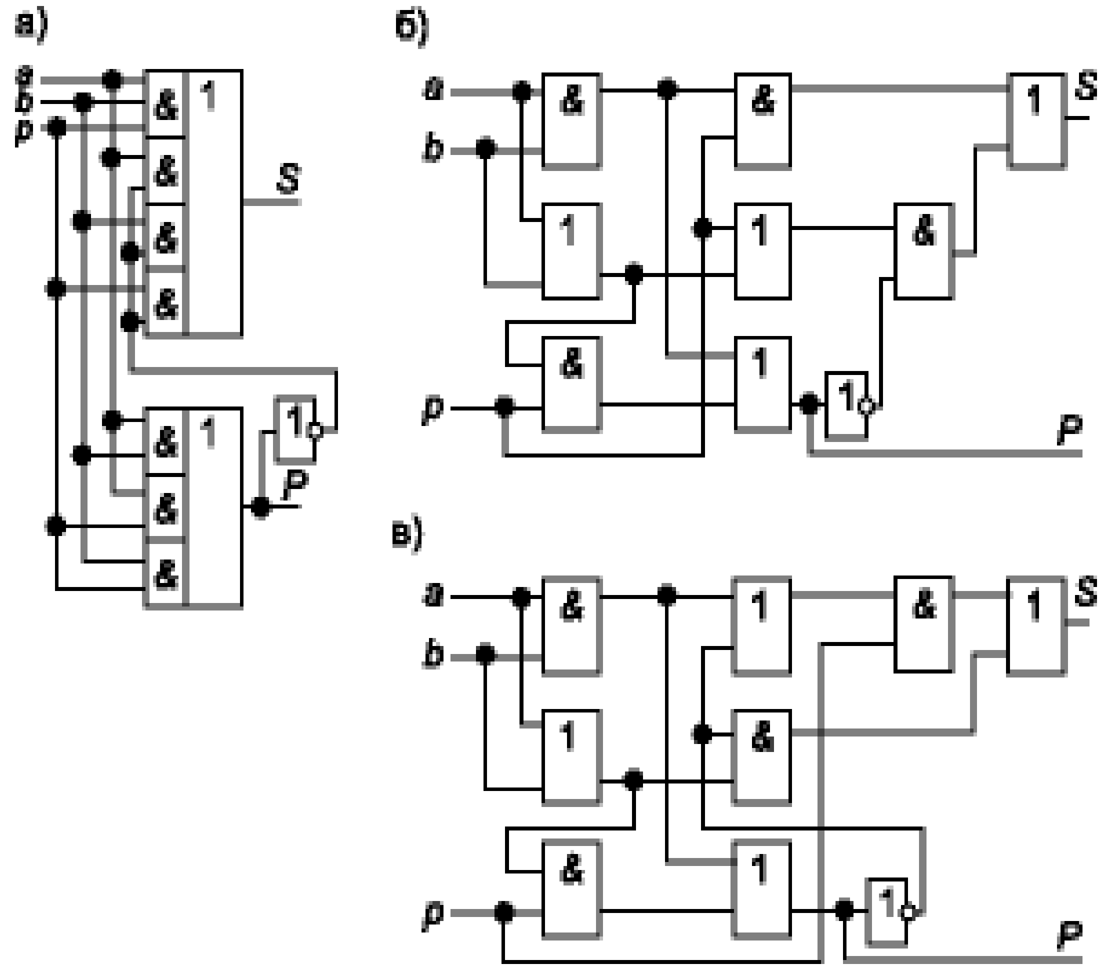
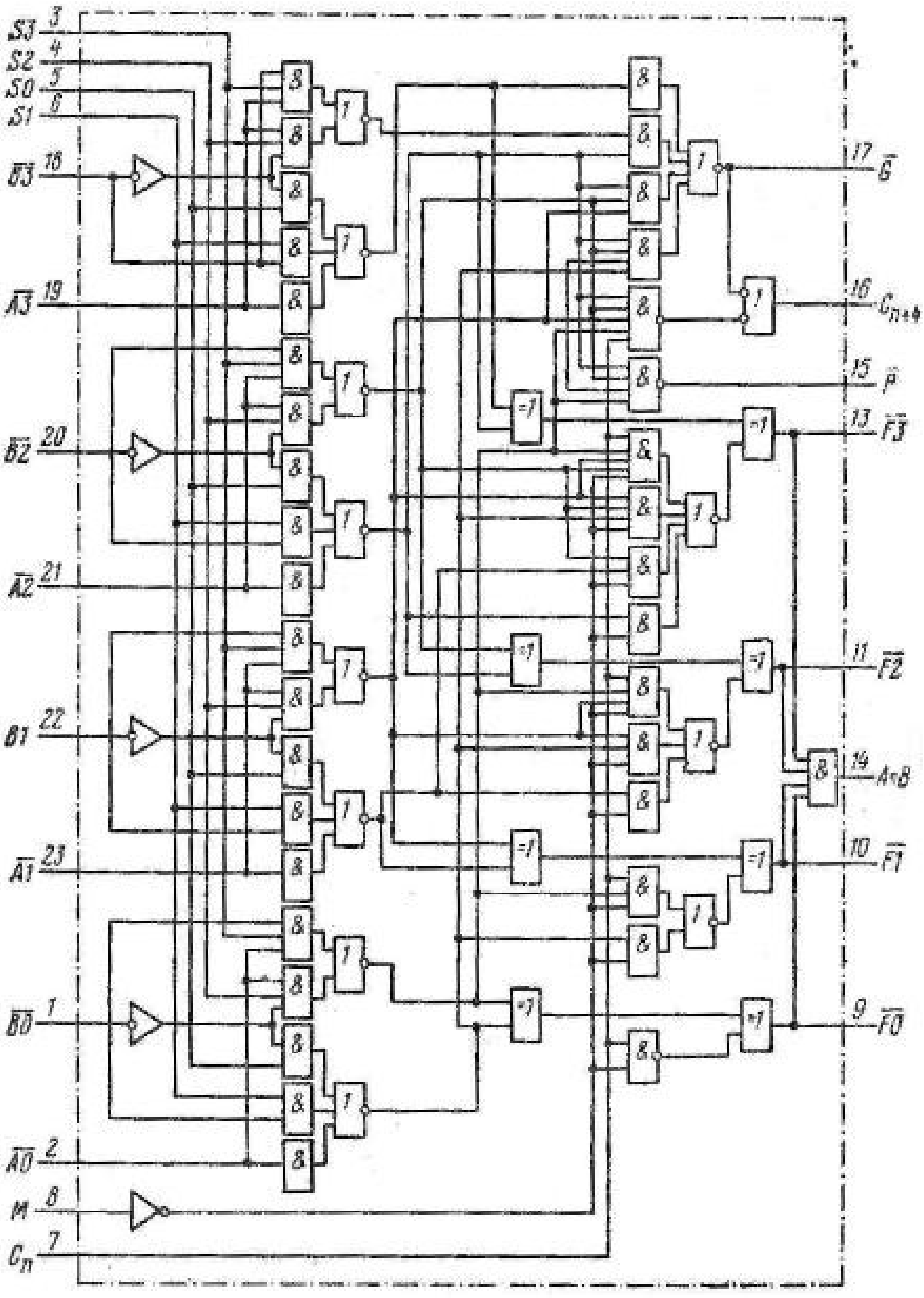


Рис. 1.32



Варианты полного одноразрядного сумматора



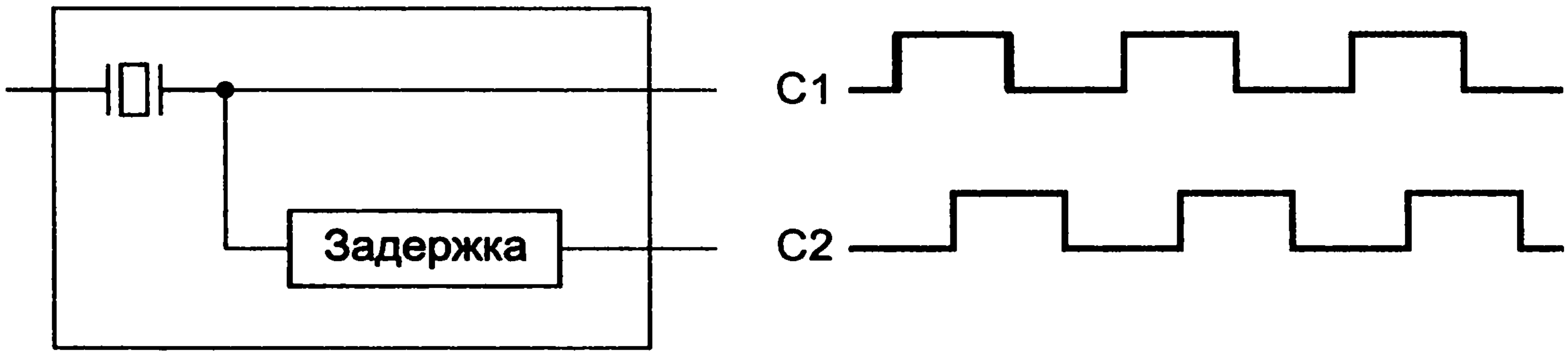
Логическая схема
4-разрядного АЛУ

Тактовые генераторы

Тактовый генератор – схема, вырабатывающая серию (логических) импульсов.
Все импульсы и интервалы между ними одинаковы по длительности.

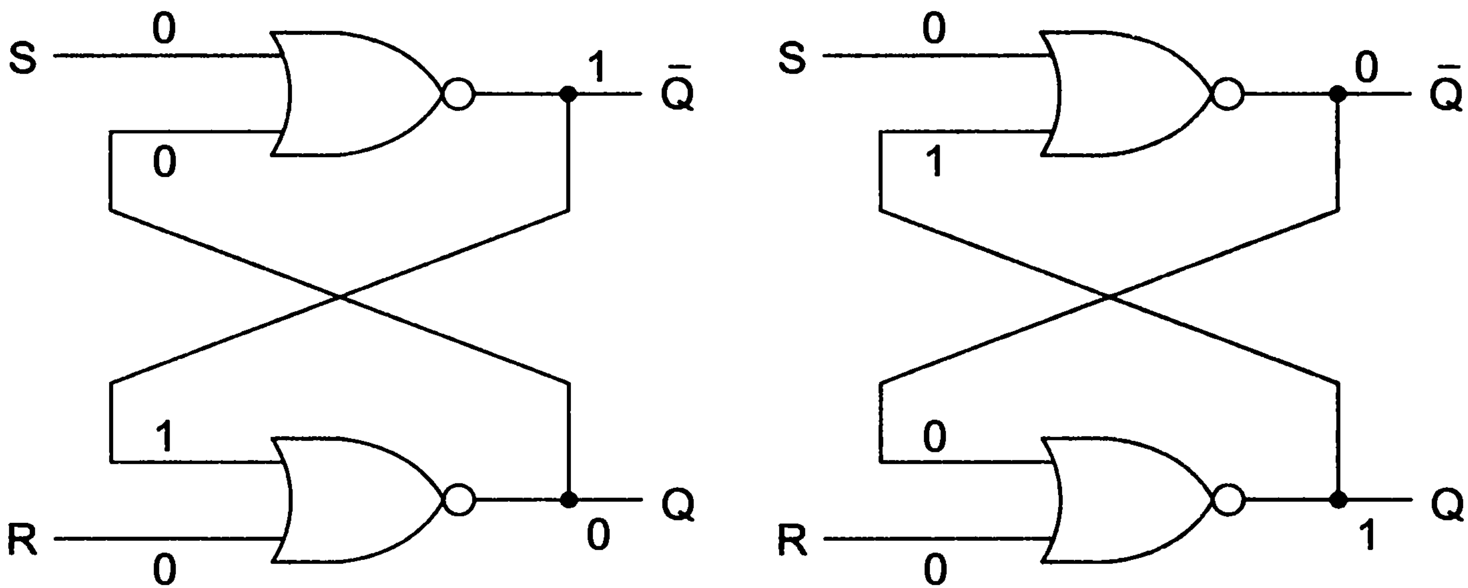
ВременнОй интервал между началом одного импульса и началом следующего называется **временем такта**.
(от единиц нс до долей сек)

Используется для синхронизации и контроля временнЫх параметров.



Триггеры

SR-триггер.
Два входа: S (Setting — установка) и R (Resetting — сброс).
Выходное состояние **НЕ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ** текущими входными сигналами.
R=S=0 – два устойчивых состояния (Q=0 и Q=1)
R=1 – установка состояния Q=0
S=1 – установка состояния Q=1
R=S=1 – неопределенность

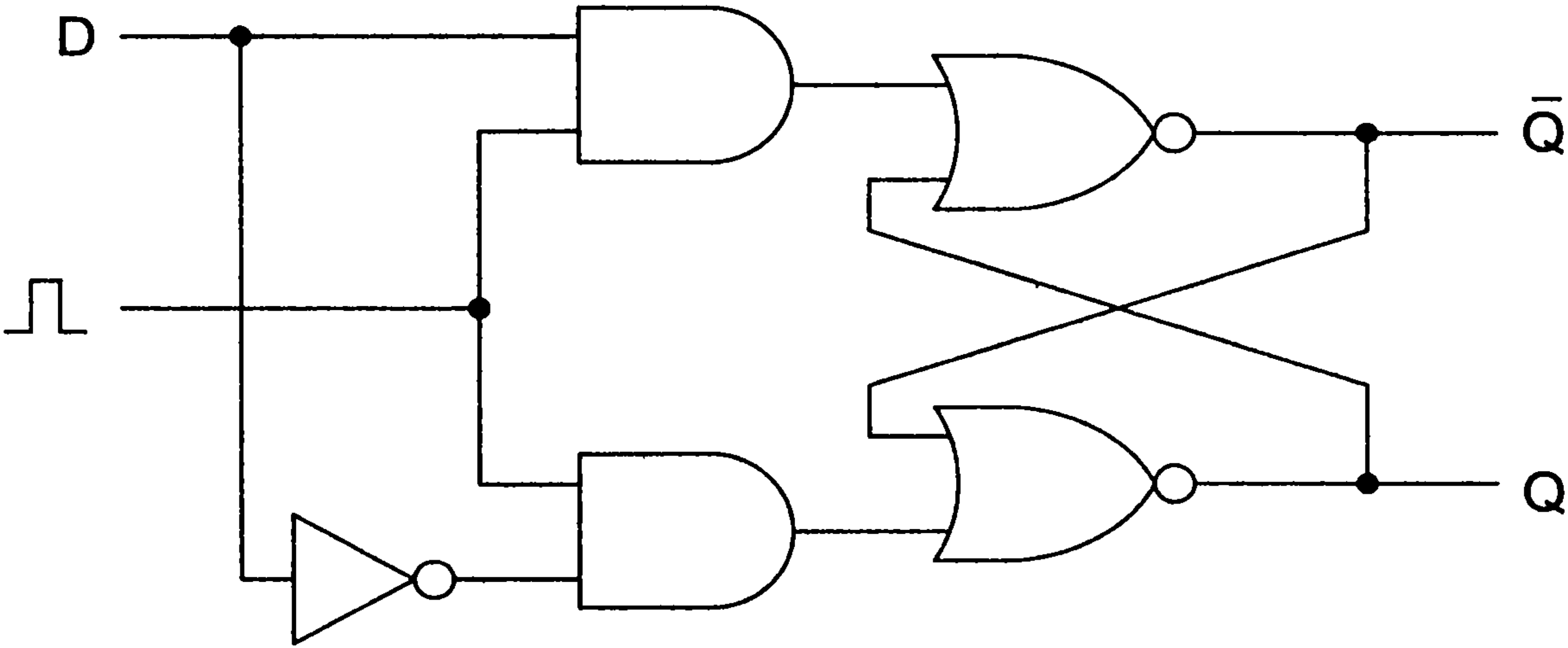


а б

A	B	НЕ-ИЛИ
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

в

Синхронный D-триггер



Является ячейкой памяти на 1 бит

ЛИТЕРАТУРА

1) Д.М. Хэррис и С.Л. Хэррис, *Цифровая схемотехника и архитектура компьютера* (Morgan Kaufman, 2-е издание, 2013), параграфы 1.4, 1.5, 5.3.2.
2) Бройдо В.Л., *Вычислительные системы , сети и телекоммуникации*, (Питер, 2-е издание, 2004), Глава 1.
3) Макарова Н.В. и др., *Информатика*, (М., Финансы и статистика, 2000), параграфы 1.3, 2.1.
4) Степанов А.Н. *Информатика. Учебник для вузов* (Питер, 4-е издание, 2006), параграфы 1.1, 1.2.
5).Степанов А.Н. *Архитектура вычислительных систем и компьютерных сетей* (Питер, 2007).
6) Таненбаум Э., Остин Т., *Архитектура компьютера*. (СПб.: Питер, 6-е изд., 2013), Глава 3.