Теоретические основы технологий компьютерного моделирования Лекция 11

Е.А. Яревский

Санкт-Петербургский Государственный Университет

10 мая 2016

Уравнения теории упругости

Пусть Ω – ограниченное открытое связное подмножество $\mathbf{R}^3$.
Граница $\Gamma = \Gamma_0$(Дирихле) $+ \Gamma_1$(Нейман).
Определим пространства вектор-функций (смещения):

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} = \left\{ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in (H^1(\Omega))^3; \quad v_i = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad i = 1, 2, 3. \right\}.$$

Норма для $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$: $||\vec{v}||_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{3} ||v_i||^2_{1,\Omega} \right)^{1/2}$.

Уравнения теории упругости

Пусть Ω – ограниченное открытое связное подмножество $\mathbf{R}^3$.
Граница $\Gamma = \Gamma_0$(Дирихле) $+ \Gamma_1$(Нейман).
Определим пространства вектор-функций (смещения):

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} = \left\{ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in (H^1(\Omega))^3; \quad v_i = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad i = 1, 2, 3. \right\}.$$

Норма для $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$: $||\vec{v}||_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{3} ||v_i||_{1,\Omega}^2 \right)^{1/2}$.
Введем тензор деформации:

$$\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = \varepsilon_{ji}(\vec{v}) = \frac{1}{2}\left(\partial_j v_i + \partial_i v_j\right), \quad 1 \le i, j \le 3.$$

Определим тензор напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \lambda \left(\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}(\vec{v}) \right) \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\vec{v}), \quad 1 \le i, j \le 3.$$

$\lambda > 0$, $\mu > 0$ – коэффициенты Ламэ.

Уравнения теории упругости

Определим билинейную форму:

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(\tilde{u}) \varepsilon_{ij}(\tilde{v}) \right) dx = \\ &= \int_\Omega \left\{ \lambda \operatorname{div} \tilde{u} \operatorname{div} \tilde{v} + 2\mu \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(\tilde{u}) \varepsilon_{ij}(\tilde{v}) \right\} dx. \end{aligned}$$

Уравнения теории упругости

Определим билинейную форму:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}) &= \int_\Omega \left(\sum_{\mathbf{i,j}=1}^{3} \sigma_{\mathbf{ij}}(\tilde{\mathbf{u}})\varepsilon_{\mathbf{ij}}(\tilde{\mathbf{v}})\right) \mathbf{dx} = \\
&= \int_\Omega \left\{\lambda \ \mathrm{div}\ \tilde{\mathbf{u}}\ \mathrm{div}\ \tilde{\mathbf{v}} + 2\mu \sum_{\mathbf{i,j}=1}^{3} \varepsilon_{\mathbf{ij}}(\tilde{\mathbf{u}})\varepsilon_{\mathbf{ij}}(\tilde{\mathbf{v}})\right\} \mathbf{dx}.
\end{aligned}$$

Линейная форма:

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{v}}) = \int_\Omega \tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{dx} + \int_{\Gamma_1} \tilde{\mathbf{g}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{d}\gamma = \int_\Omega \sum_{\mathbf{i}=1}^{3} \mathbf{f_i v_i dx} + \int_{\Gamma_1} \sum_{\mathbf{i}=1}^{3} \mathbf{f_i g_i d}\gamma.$$

Вектор-функции:
$\tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}) \in (\mathbf{L_2}(\Omega))^3$, $\tilde{\mathbf{g}} = (\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, \mathbf{g_3}) \in (\mathbf{L_2}(\Gamma_1))^3$.

Уравнения теории упругости

Формы $a(\vec{u}, \vec{v})$ и $f(\vec{v})$ – ограничены.
Форма $a(\vec{u}, \vec{v})$ – $\mathbf{V}$-эллиптична (док-во основано на неравенстве Корна.)

Уравнения теории упругости

Формы $a(\vec{u}, \vec{v})$ и $f(\vec{v})$ – ограничены.
Форма $a(\vec{u}, \vec{v})$ – $\mathbf{V}$-эллиптична (док-во основано на неравенстве Корна.)
Аналогично скалярному варианту:
Существует единственное решение задач:
1) Задачи минимизации: найти минимум энергии

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2}\mathbf{a}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{v}}).$$

2) Вариационной задачи (принцип возможных перемещений): найти $\vec{u} \in \mathbf{U}$ такую, что $\forall \vec{v} \in \mathbf{V}$

$$\mathbf{a}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{v}}).$$

Уравнения теории упругости

Используя формулы Грина, можно найти соответствующую краевую задачу:

$$\mu\Delta\tilde{\mathbf{u}} - (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}} \text{ в } \Omega$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma_0$$

$$\sum_{\mathbf{j}=\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} \sigma_{\mathbf{ij}}(\tilde{\mathbf{u}})\nu_{\mathbf{j}} = \mathbf{g}_{\mathbf{i}} \text{ на } \Gamma_1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Это система уравнений линейной теории упругости.

Уравнения теории упругости

Используя формулы Грина, можно найти соответствующую краевую задачу:

$$\mu \Delta \tilde{\mathbf{u}} - (\lambda + \mu)\ \text{grad div}\ \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}} \text{ в } \Omega$$
$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma_0$$
$$\sum_{\mathbf{j}=\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} \sigma_{\mathbf{ij}}(\tilde{\mathbf{u}})\nu_{\mathbf{j}} = \mathbf{g_i} \text{ на } \Gamma_1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Это система уравнений линейной теории упругости.
Малая толщина $\rightarrow$ физические предположения о поведении функций и свойств $\rightarrow$ интегрирование энергии по толщине.
Итог: две переменные и 1 функция (вертикальное перемещение).
Бигармоническая задача для этой скалярной функции.

Бигармоническая задача

$$V = U = H_0^2(\Omega)$$
$$a(u, v) = \int_\Omega \Delta u(x) \Delta v(x) dx$$
$$f(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx, \quad f \in L^2(\Omega).$$

Формы ограничены, $a(u, v)$ – $H_0^2(\Omega)$-эллиптична.

Бигармоническая задача

$$V = U = H_0^2(\Omega)$$
$$a(u, v) = \int_\Omega \Delta u(x) \Delta v(x) dx$$
$$f(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx, \quad f \in L^2(\Omega).$$

Формы ограничены, $a(u, v)$ – $H_0^2(\Omega)$-эллиптична.
Задача минимизации:

$$J : v \to J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta v(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x) v(x) dx.$$

Вариационная задача:

$$\forall v \in H_0^2(\Omega) : \quad \int_\Omega \Delta u(x) \Delta v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx.$$

Бигармоническая задача

Однородная задача Дирихле:

$$\Delta^2 u(x) = f(x) \text{ в } \Omega$$
$$u(x) = \partial_\nu u(x) = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Задача о (закрепленной) пластине

Пластина постоянной толщины под действием поперечной силы:

$$V = U = H_0^2(\Omega)$$

$$a(u,v) = \int_\Omega (\Delta u(x) \Delta v(x) +$$

$$+ (1-\sigma)(2\partial_{12} u \partial_{12} v - \partial_{11} u \partial_{22} v - \partial_{22} u \partial_{11} v))\, dx$$

$$f(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx, \quad f \in L^2(\Omega).$$

σ – коэффициент Пуассона.

Вновь выполнены условия АЗМ и АВЗ.

Задача о (закрепленной) пластине

Пластина постоянной толщины под действием поперечной силы:

$$V = U = H_0^2(\Omega)$$

$$a(u,v) = \int_\Omega (\Delta u(x)\Delta v(x) +$$

$$+(1-\sigma)(2\partial_{12}u\partial_{12}v - \partial_{11}u\partial_{22}v - \partial_{22}u\partial_{11}v))\,dx$$

$$f(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \quad f \in L^2(\Omega).$$

σ – коэффициент Пуассона.

Вновь выполнены условия АЗМ и АВЗ.

Дифференциальное уравнение: получается **ТА ЖЕ** однородная задача Дирихле.

Краевая задача и вариационная задача: нет взаимно-однозначного соответствия (только в $H_0^2(\Omega)$).

Бигармоническая задача в $\mathbb{R}^1$

$$V = U = H_0^2([a,b])$$
$$a(u,v) = \int_{[a,b]} u''(x)v''(x)dx$$
$$f(v) = \int_{[a,b]} f(x)v(x)dx, \quad f \in L^2([a,b]).$$

Вариационная задача:

$$\forall v \in H_0^2([a,b]) : \quad \int_{[a,b]} u''(x)v''(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)v(x)dx.$$

Бигармоническая задача в $\mathbb{R}^1$

При переходе от элемента к элементу:
требуется непрерывность функции И производной.
На каноническом элементе минимально необходимы 4 функции.
$\{\mathbf{p}(-1), \mathbf{p}(1), \mathbf{p}'(-1), \mathbf{p}'(1)\} = 0{,}1$ (только одна 1).

$$\mathbf{p}(\xi) = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_1}\xi + \mathbf{a_2}\xi^2 + \mathbf{a_3}\xi^3 = (1, \xi, \xi^2, \xi^3) \cdot (\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3})^T.$$

Например, $p_1(\xi)$: $p_1(-1) = 1$, остальные значения $=0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Бигармоническая задача в $\mathbf{R}^1$

Другой способ:

$$\mathbf{p_1}(\xi) = (\xi - \mathbf{1})^2(\mathbf{A}\xi + \mathbf{B}).$$

$$\mathbf{p_1}(-\mathbf{1}) = \mathbf{4}(-\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{1},$$
$$\mathbf{p}_1'(-\mathbf{1}) = \mathbf{4A} - \mathbf{4}(-\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{8A} - \mathbf{4B} = \mathbf{0}.$$

Тогда $B = 2A$, $A = 1/4$, $B = 2/4$.

$$\mathbf{p_1}(\xi) = (\xi - \mathbf{1})^2 \frac{\xi + \mathbf{2}}{\mathbf{4}}.$$

Аналогично,

$$\mathbf{p_3}(\xi) = (\xi - \mathbf{1})^2 \frac{\xi + \mathbf{1}}{\mathbf{4}}.$$

Иерархические функции более высоких степеней:

$$\mathbf{p_{4+i}}(\xi) = (\xi - \mathbf{1})^2(\xi + \mathbf{1})^2\mathbf{r_i}(\xi) = (\xi^2 - \mathbf{1})^2\mathbf{r_i}(\xi), \quad \deg \mathbf{r_i}(\xi) = \mathbf{i}.$$