# МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

# ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Кафедра математического моделирования систем и процессов

П.В. Трусов, И.Э. Келлер

# ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Курс лекций

# Часть II

Некоторые современные теории пластичности

Рекомендовано Учебно-методическим отделом по направлению «Электроника и прикладная математика» в качестве учебного пособия для студентов специальности «прикладная математика» УДК 539.3

Теория определяющих соотношений. Ч.П. Некоторые современные теории пластичности/ П.В. Трусов, И.Э. Келлер. Пермь: Перм. гос. техн. ун-т. 1999. с.

ISBN

Предлагаемая II часть курса лекций по теории определяющих соотношений посвящена современным теориям пластичности, не нашедшим должного освещения в учебно-методической литературе, содержащимся главным образом В журнальных статьях и монографиях. Предпринята попытка классификации известных теорий пластичности. Приведены краткие сведения из физики твердого тела и физического материаловедения. Рассмотрены теории упругопластических процессов A.A. Ильюшина, модификации теории пластического течения, эндохронная теория пластичности. Особое внимание уделено физической теории пластичности. Курс снабжен набором упражнений.

Для студентов и аспирантов механико-математических специальностей.

Ил. . Библиогр.: назв.

Рецензенты: Институт механики сплошной среды УрО РАН (директор – чл.-корр. РАН В.П. Матвеенко); д-р физ.-мат. наук, профессор Р.А. Васин

©Пермский государственный технический университет, 1999

ISBN

# Оглавление

Основные обозначения	4
Введение	6
Краткие сведения из физики твердого тела и	23
материаловедения	
Теория упругопластических процессов А.А. Ильюшина	41
Некоторые модификации теории пластического течения	49
Эндохронная теория пластичности	74
О физической теории пластичности	82
	Основные обозначения

## Основные обозначения

 $\boldsymbol{B}$ ,  $\boldsymbol{B}_0$  – тело и его отсчетная конфигурация

*G* – модуль Юнга

*h* – длина следа запаздывания

 $K_0$ ,  $K_t$  – отсчетная и актуальная конфигурации

s, λ – длина дуги траектории деформации (или пластической деформации)

*t* – время (или его аналог)

*z* – внутреннее время

*є* – средняя деформация

*є*<sub>*u*</sub> – интенсивность деформаций

 $\theta$  – температура

 $\vartheta_i$  (*i* =  $\overline{1,5}$ ) – углы вектора напряжений с векторами репера Френе

 $\sigma$  – среднее напряжение

 $\sigma_u$  – интенсивность напряжений

 $\mathfrak{I}^{(5)}, \Sigma^{(5)}$  – пространства деформаций и напряжений

э,  $\Sigma$  – векторы деформаций и напряжений

 $a^{i}$  (*i* =  $\overline{1,5}$ ) – векторы ортонормированного базиса в пространстве деформаций (напряжений)

**b** – вектор Бюргерса

 $p^i$  – вектор естественного ортогонального репера Френе

*R*<sub>0</sub>, *r* **– радиус-векторы частиц в отсчетной и актуальной конфигурациях** 

**D**, **d** – тензор деформации скорости и его девиатор

*М*<sup>(*k*)</sup> – ориентационный тензор *k*-й кристаллографической системы

*є*, *е* – тензор малых деформаций и его девиатор

*р* – тензор остаточных микронапряжений

 $\sigma$ , S – тензор напряжений Коши и его девиатор

*У* – мера напряженного состояния (произвольная)

 $\mathop{\mathbf{\varepsilon}}_{{\scriptscriptstyle{\widehat{=}}}}$  – тензор Леви-Чивита

F, F',  $R_{\beta}$ ,  $R_{r\beta}$ ,  $C_{\beta}$ ,  $C_{r\beta}$  – операторы конститутивных

соотношений

 $oldsymbol{J}_{eta}$  – внутренние переменные

 $J^e_{\alpha}$ ,  $J^i_{\delta}$  – «явные» и «скрытые» внутренние переменные

 $\boldsymbol{P}_{\gamma}$  – параметры воздействия

 $(\cdot)^{e}$ ,  $(\cdot)^{p}$  – индексы, относящиеся к упругим и пластическим составляющим

 $(\cdot)^r$  – обозначение объективной производной;

 $\langle \cdot \rangle$  – осредненные величины

#### Сокращения

ГЦК, ГПУ, ОЦК – гранецентрированная кубическая, гексагональная плотноупакованная, объемно-центрированная кубическая (кристаллические решетки)

ЗУ – замыкающие уравнения

ИТН – изображающая точка в пространстве напряжений

МДТТ – механика деформируемого твердого тела

МСС – механика сплошной среды

ОС - определяющие соотношения

ТДС – термодинамическая система

ТОС – теория определяющих соотношений

ТП – теория пластичности

ТПТ – теория пластического течения

УПП – упругопластический процесс

ФТП – физическая теория пластичности

ФТТ – физика твердого тела

ЭТП – эндохронная теория пластичности

ЭУ – эволюционные уравнения

Если в физике и химии где-то и существует простота, то заведомо не в микроскопических моделях.

И. Пригожин

Физическая модель явления и его математическое описание дополнительны.

А.Б. Мигдал

#### 1. Введение

Предлагаемый курс лекций содержит изложение наиболее распространенных частных теорий определяющих соотношений (ОС). Выбор в качестве первой частной теории ОС теории пластичности (ТП) обусловлен следующими обстоятельствами. Вопервых, в настоящее время теория пластичности является одной из наиболее широко применяемых в теории и прикладных задачах механики деформируемого твердого тела (МДТТ). Во-вторых, ТП представляет собой одну из наиболее глубоко развитых теорий ОС, с достаточно хорошо разработанной аксиоматикой, имеет весьма обширное экспериментальное обоснование. В-третьих, подходы и методы теории пластичности могут с успехом применяться и применяются в других разделах МДТТ.

Из рассмотрения в настоящем курсе исключены (или излагаются весьма кратко) классические теории пластичности, достаточно подробно изложенные в многочисленных монографиях и учебных пособиях. Основное внимание уделяется разработанным в последние 20-30 лет теориям, нашедшим отражение преимущественно в статьях и специальных научных изданиях.

Остановимся вкратце на возможной классификации ОС (моделей) упругопластических тел.

через обозначать меру Будем Σ (в общем случае произвольную) напряженного состояния,  $\Sigma^{r}$  – ее объективную  $\gamma = l, \Gamma$ скорость изменения,  $P_{\nu}$ – параметры воздействия термомеханической (например, температура, мера деформированного состояния и т.д.) и нетермомеханической (например, радиация, химические воздействия) природы.

Как известно, ОС любого типа являются моделями, целевыми отражениями поведения реальных материалов в определенных диапазонах изменения параметров воздействия. В силу этого ОС должны содержать в своей структуре параметры, ответственные 3**a** взаимодействие микрочастиц (молекул, атомов И т.д.) материала. Среди реального последних можно выделить относительно устойчивые, незначительно изменяющиеся R исследуемом диапазоне воздействий параметры, которые обычно называют материальными константами (например, модуль упругости, коэффициент Пуассона и т.д.). Отметим, что в случае параметров изменении изменения ЭТИХ при характеристик воздействия (например, температуры), поведение указанных параметров в большинстве случаев описывается функциями (в примере температуры), содержащими данном некоторое количество – как правило, незначительное, - констант, т.е. в этом происходит просто определенное увеличение числа случае констант. В большинстве случаев материальных указанные параметры отражают на макроуровне взаимодействия на атомномолекулярном (и меньших) масштабных уровнях и являются малочувствительными к материала на структуре мезо-И микроуровнях (размеры и морфология зерен, субзерен, фрагментов, дислокационная структура и т.д.). Следует заметить, однако, что эти параметры чувствительны к структурным перестройкам на больших масштабах (порядка нескольких размеров зерен в поликристалле), образование например, как текстуры В результате таким, согласованного поведения совокупности мезообъектов.

В то же время процессы необратимого (неупругого) деформирования, показывают многочисленные как экспериментальные чувствительны исследования, весьма К изменению мезо-И микроструктуры материала, которые трансформируются процессе существенным образом В Указанные процессы существенным образом деформирования. взаимосвязаны: стороны, макронагружения с одной (макродеформации) являются источником, движущей силой изменения мезо- и микроструктуры; с другой стороны, эволюция является определяющим микроструктуры фактором мезо-И поведения материала на макроуровне. В связи с этим появляются, по крайней мере, – две возможности учета эволюции мезо- и микроструктуры: неявным или явным способом. В первом случае в структуру ОС вводятся достаточно сложные операторы над историей макронагружения (макродеформации), без использования соответствующих параметров, описывающих собственную эволюцию мезо- и микроструктуры. Как правило, в этом случае трудно выявить и обосновать физический смысл, механизмы деформирования, описываемые различными операторами модели материала.

В последние десятилетия все большее признание находит второй подход – явное введение в структуру определяющих соотношений параметров, описывающих состояние и эволюцию формулировка мезо-И микроструктуры, эволюционных (кинетических) уравнений для этих параметров, называемых внутренними переменными. В литературе, посвященной различным теориям процессов необратимого деформирования, переменными внутренними называют параметры, отражающие структуру и механизмы деформирования на мезои микроуровнях. К основным преимуществам этого подхода относятся ясность физической интерпретации эволюционных и определяющих соотношений, возможность прямой или косвенной проверки результатов анализа эволюции мезо- и микроструктуры, относительная простота совокупности уравнений модели (определяющих и эволюционных), широкие возможности обработки результатов решения эволюционных уравнений при переходе к макропеременным (с использованием различных операторов осреднения). Кроме того, поскольку эволюционные уравнения описывают фундаментальные физические механизмы, реализуемые в широком классе реальных материалов, модели данного типа обладают значительной универсальностью. К основным недостаткам рассматриваемого подхода следует отнести: большое число внутренних переменных и соответствующих эволюционных уравнений, необходимых для адекватного описания процесса необратимого деформирования; трудности решения «проблемы (установления соотношений замыкания» между внутренними переменными и макропараметрами); отсутствие в подавляющем решений большинстве случаев аналитических системы эволюционных и определяющих соотношений, что приводит к необходимости использования численных методов.

с приведенного Следует отметить, ЧТО, учетом выше определения внутренних переменных, настоящее В время невозможно назвать какую-либо теорию необратимых деформаций, не использующую – явно или неявно – эти переменные. Например, в классической теории пластичности широко применяется понятие поверхности текучести, отделяющее в пространстве напряжений

8

(или деформаций) области упругого и неупругого деформирования. В процессе деформирования поверхность текучести изменяет свою форму и размеры, перемещается как целое. Эта эволюция поверхности текучести отражает изменение свойств материала, обусловленное изменением мезо- и микроструктуры, в связи с чем параметры, описывающее эволюцию этой поверхности, с полным правом можно отнести к внутренним переменным. Аналогичная ситуация имеет место и в других теориях (вязкоупругости, вязкопластичности, ползучести и др.).

В связи с вышесказанным в структуре ОС, описывающих процессы необратимого деформирования, должны фигурировать внутренние переменные. В качестве последних будут использоваться тензорзначные переменные  $J_{\beta}$ ,  $\beta = \overline{I,B}$  (произвольной в общем случае валентности); вопрос о типе, физическом смисле и аргиментах внитренних переменных решается

физическом смысле и аргументах внутренних переменных решается в рамках конкретных теорий ОС.

Вероятно, термин «внутренние переменные» впервые появился в работах no термодинамике сплошных сред. Учитывая контекст, в котором термин используется в континуальной термодинамике, можно предположить, что его этимология обусловлена следующими соображениями. Под параметрами данного типа в термодинамике понимаются термодинамические переменные, характеризующие внутреннее контролируемые системы, не в явной форме состояние характеристиками (окружающей среды), не внешними сопрягаемые с последними.

Следует отметить, что часть внутренних переменных непосредственно входит в структуру ОС данного масштабного уровня, такие переменные в дальнейшем будем обозначать  $J^{e}_{\beta}$ ,

 $\beta = \overline{I, B^e}$  и для ясности называть их внутренними «явными» переменными. К числу таких переменных относятся, например, параметры, характеризующие форму, положение и размеры поверхности текучести в теориях пластического течения.

Вообще говоря, к переменным данного типа следует отнести также упругие и пластические составляющие тензора «полных» деформаций в упругопластических телах. Действительно, эти составляющие безусловно отражают структурные перестройки материала; в ряде физических моделей, появившихся в последние годы, для их определения используют микро- и мезоскопические характеристики материала и процесса нагружения (деформирования). Тем не менее, в настоящем изложении будем следовать традициям МСС, относя эти переменные к параметрам воздействия (или отклика) и используя известные соглашения об определении упругих составляющих из закона, описывающего разгрузку, и аддитивный или мультипликативный способ разложения деформаций на упругие и пластические составляющие.

Вторая группа внутренних переменных (в большинстве случаев относящихся к более глубоким масштабным уровням) входит в качестве переменных в эволюционные уравнения (ЭУ); переменные этой группы будем обозначать как  $J^i_{\beta}$ ,  $\beta = \overline{I, B^i}$ ; для

того, чтобы отличать их от переменных первой группы будем называть их внутренними «скрытыми» переменными. К числу таких переменных в теориях неупругого деформирования поликристаллов (мезо- и макроуровней) можно отнести, например, плотность краевых и винтовых дислокаций. Полная совокупность внутренних

переменных, таким образом, определяется как  $\left\{ \boldsymbol{J}_{\beta} \right\} = \left\{ \boldsymbol{J}_{\gamma}^{e}, \boldsymbol{J}_{\delta}^{i} \right\},$ 

$$\beta = \overline{I, B}$$
,  $\gamma = \overline{I, B^e}$ ,  $\delta = \overline{I, B^i}$ ,  $B = B^e + B^i$ .  
Введенные выше параметры  $P_{\gamma}$  в зависимости от контекста

могут содержать все или часть мер, характеризующих напряженное и деформированное состояние исследуемого тела. Учитывая, что ОС в общем случае представляют собой ограничения (связи), накладываемые на параметры всех типов, ОС в достаточно общей форме может быть записано следующим образом:

$$\Pi(\mathbf{P}_{\gamma}, \mathbf{J}_{\beta}^{e}) = \mathbf{O}.$$
(1.1)

Наиболее употребительными в МСС являются уравнения состояния, записанные в разрешенном относительно напряжений виде:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{F} \left( \boldsymbol{P}_{\gamma}, \boldsymbol{J}_{\beta}^{\boldsymbol{e}} \right), \tag{1.2}$$

или в «скоростной» форме:

$$\boldsymbol{\Sigma}^{r} = \boldsymbol{F}^{r}(\boldsymbol{P}_{\gamma}, \boldsymbol{J}_{\beta}^{e}).$$
(1.3)

Определяющие соотношения (1.2) или (1.3) должны быть дополнены еще двумя группами соотношений – эволюционными и замыкающими. О второй группе будет сказано ниже. К эволюционным уравнениям, в отличие от традиционно принятых, здесь относятся соотношения только для внутренних скрытых переменных  $J^{i}_{\beta}$ ,  $\beta = \overline{l, B^{i}}$ . В общем виде изменение  $J^{i}_{\beta}$  можно описать следующими эволюционными (кинетическими) уравнениями, которые можно записать разрешенными в терминах или самих внутренних переменных, или их объективных производных:

$$J^{i}_{\beta} = \mathbf{R}_{\beta}(\mathbf{P}_{\gamma}, J^{i}_{\delta}) , \qquad (1.4)$$

$$\boldsymbol{J}_{\beta}^{ir} = \boldsymbol{R}_{r\beta}(\boldsymbol{P}_{\gamma}, \boldsymbol{J}_{\delta}^{i}). \tag{1.5}$$

Замечание 1.1. Одной из наиболее сложных проблем теории определяющих соотношений (ТОС) является проблема замыкания эволюционных и определяющих уравнений (наиболее известным примером может служить проблема замыкания в теории турбулентности). Суть проблемы состоит в том, что при формулировке ОС и ЭУ в терминах, например, макропеременных возникает необходимость введения в рассмотрение характеристик более низких структурных или масштабных уровней, для которых формулируются соответствующие ОС и ЭУ.

В настоящее время в механике сплошной среды (МСС) наиболее употребительным является использование четырех масштабных уровней: макроскопический, мезоскопический, микроскопический и атомный. Конкретная шкала масштабных уровней устанавливается для различных классов материалов в соответствии с реализующимися механизмами деформирования (течения) и выполнением требования «представительности» объема соответствующего масштабного уровня.

В МДТТ и, в частности, в теории пластичности в последние 10-20 лет широко используется другое важное понятие – структурных уровней (деформации), основанное на выделении структурных дефектов материала, имеющих различную природу и происхождение, связанное с эволюцией дефектных структур различных механизмов деформирования и характерных параметров (внутренних переменных), описывающих эволюцию взаимодействие дефектов различных структурных уровней. Следует отметить, что процессы необратимого деформирования счет одновременной или последовательной реализуются за активизаиии механизмов различных структурных *уровней*. Масштаб структурных уровней определяется характерными размерами структурных неоднородностей. При формулировке ОС и ЭУ на различных масштабных уровнях каждому из них на основе тщательного физического анализа ставятся в соответствие определенные структурные уровни деформации и механизмы (моды) деформации; при этом один и тот же структурный уровень деформации может быть одновременно присущ нескольким масштабным уровням.

Возвращаясь к проблеме замыкания, следует отметить два наиболее употребительных подхода к ее решению. В первом – феноменологическом, – параметры, характеризующие структуру на более низких масштабных уровнях, определяются функциональными уравнениями через параметры рассматриваемого уровня (например, как в модели турбулентности Рейнольдса) с последующей экспериментальной проверкой этих уравнений. Второй подход основан на построении иерархической совокупности моделей нескольких масштабных уровней u установлении связей между однотипными характеристиками процесса деформирования соседних уровней. Следует отметить, что в этом случае полностью избежать феноменологических соотношений, конечно, не удается, однако они записываются для самого низкого масштабного уровня в принятой иерархической совокупности. Строго говоря, необходимы математические исследования «затухания» ошибок, внесенных при применении подобных феноменологических соотношений, при переходе на более высокие масштабные уровни.

В любом случае для замкнутой модели материала требуются уравнения, связывающие внутренние переменные, непосредственно входящие в ОС рассматриваемого масштабного уровня, с параметрами воздействия и внутренними скрытыми переменными. Общий вид таких замыкающих уравнений (ЗУ) мало отличается от (ЭУ) (1.4)-(1.5), однако они существенно различаются своим физическим «наполнением», подходами к их установлению и ролью в совокупности уравнений, модели материала, в связи с чем эти ЗУ выделяются в отдельную группу. Аналогично соотношениям (1.2)-(1.5) ЗУ могут быть записаны в одном из двух видов:

$$J_{\beta}^{e} = C_{\beta}(\boldsymbol{P}_{\gamma}, \boldsymbol{J}_{\delta}^{i}), \qquad (1.6)$$

$$J_{\beta}^{er} = C_{r\beta}(\boldsymbol{P}_{\gamma}, \boldsymbol{J}_{\delta}^{i}). \qquad (1.7)$$

Таким образом, в качестве полной системы уравнений, описывающих поведение материала, будет рассматриваться совокупность ОС (1.2)(или (1.3)), ЭУ (1.4)(или (1.5)) и ЗУ (1.6)(или (1.7)). При этом в некоторых теориях неупругого деформирования могут отсутствовать ЭУ (в принятом здесь смысле), ЭУ и ЗУ могут входить неявным образом в ОС. Правые части всех групп соотношений в качестве аргументов могут содержать части параметров  $P_{\gamma}$ ,  $J_{\beta}^{e}$ ,  $J_{\delta}^{i}$ , а в некоторых случаях в них могут полностью отсутствовать тот или иной тип параметров (чаще всего –  $J_{\delta}^{i}$ ). Указанные обстоятельства с точки зрения классификации теорий неупругого деформирования не являются существенными, по крайней мере – по отношению к известным авторам теориям.

В качестве независимых переменных в МСС (в частности – и в МДТТ) фигурируют координаты (радиус-вектор r) и время  $\tau$ ; при этом частицы материальных объектов полагаются непрерывным образом заполняющими некоторую область пространства  $\Re^3$ . Несмотря на использование в ТОС при построении моделей материалов нескольких масштабных уровней с присущими им носителями различных механизмов деформирования, с точки зрения физики в большинстве случаев имеющими дискретную природу, процессов при описании эволюции и взаимодействия этих носителей применяются непрерывные, «континуальные» характеристики, получаемые осреднением по представительным объемам соответствующих масштабных (или структурных) уровней. Указанное обстоятельство следует учитывать при анализе и интерпретации результатов решения задач МСС. Следует отметить, ЧТО при исследовании поведения материалов С памятью обязательным является использование материального или способов описания движения, лагранжева основанных на рассмотрении движения выделенных материальных частиц. Для введения лагранжевых координат используется либо произвольная криволинейная система координат  $O\xi^{1}\xi^{2}\xi^{3}$ , либо декартова *ОХ<sup>1</sup>Х<sup>2</sup>Х<sup>3</sup>* (часто выбираемая совпадающей с ортогональная декартовой ортогональной системой координат системы отсчета, для конфигураций), вводимые единой всех в отсчетной конфигурации К<sub>0</sub>. Для краткости будем определять лагранжевы «метки» материальных частиц непрерывным радиус-вектором  $R_{a}$ , определенном на конфигурации В<sub>0</sub> тела В в отсчетной конфигурации К<sub>0</sub>. При использовании материального способа описания движения любую выделенную материальную частицу будем «метить» индексом x.

Особое значение в теории ОС имеет понятие «время». Полагается, что физическое время, как и в классической МСС, является универсальным, не зависящим от движения выбранной системы отсчета, от наличия или отсутствия материальной субстанции и ее движения (иначе говоря, релятивистская МСС выходит за рамки настоящего курса). Определенные сложности с использованием понятия «время» В теориях неупругого поведения материалов связаны с тем, что для ряда механизмов и процессов неупругого деформирования физическое время не является подходящей независимой переменной. Это относится к таким процессам, в которых реакция материала не зависит от скоростей изменения воздействий и внутренних переменных (в определенных диапазонах), от того, как медленно или быстро будут последние. теориях, описывающих изменяться В подобные процессы, физическое время в качестве независимой переменной, как правило, не используется. В первую очередь к таковым относятся классическая теория пластичности. Взамен физического времени в подобных теориях вводится некоторый неубывающий параметр, служащий для определения последовательности стадий (состояний) протекающего процесса. Примерами таких переменных являются длина дуги траектории (пластической) деформации в теории пластичности, внутреннее время в эндохронных теориях, термодинамическое время (А.А. Вакуленко) в широком классе теорий неупругого деформирования.

В то же время физическое время является существенным чрезвычайно широкого параметром для класса процессов неупругого деформирования материалов, в особенности – связанных с диффузионными механизмами их реализации. К числу теорий, описывающих подобные процессы, относятся теории вязких жидкостей, вязкопластичности, вязкоупругости, ползучести и др.; теории, содержащие в качестве независимого аргумента физическое время в явной форме, в МСС принято называть реологическими. В силу вышесказанного физическое время не может быть исключено из числа существенных независимых переменных во всех теориях, в каждом конкретном случае требуется тщательных физический анализ механизмов, определяющих поведение материала в тех или диапазонах изменения параметров воздействия И их иных скоростей.

Возможно, в качестве необходимого условия возможности перехода физического времени указанному от к выше неубывающему параметру может служить малость времен релаксации для анализируемых процессов по сравнению с временами существенного изменения параметров воздействия (или большая скорость релаксации по сравнению со скоростью изменения параметров воздействия). Иначе говоря, после изменения воздействий система должна достаточно быстро приходить в

термодинамическое равновесие, до того, как воздействия претерпят сколь-нибудь существенные изменения. Вопрос о достаточности этого условия остается открытым.

В связи с вышесказанным в дальнейшем изложении t будет обозначать либо физическое время, либо некоторый неубывающий параметр – аналог времени. Смысл «времени» t, если этого не следует из контекста, будет поясняться отдельно. При рассмотрения общих теоретических вопросов построения ОС правомочно пользоваться термином «время», не раскрывая его конкретного смысла.

Замечание 1.2. вопрос выбора типа ОС, ЭУ и ЗУ – в терминах напряженного состояния u других параметров мер («интегральные» соотношения) или мер скоростей их изменения («дифференциальные» соотношения, соотношения скоростного типа), – в каждом конкретном случае решается исследователем. При этом учитываются соображения физического характера, сложности записи соотношений, ясности интерпретации результатов и т.д.; понятно, что в силу отсутствия четко определенных критериев подобный выбор во многом субъективен. Следует отметить, что общая система соотношений модели материала может содержать уравнения разных типов как по группам соотношений, так и внутри каждой из трех групп.

Опыт работы авторов в области построения моделей свидетельствует материалов предпочтительности 0 использования соотношений скоростного (дифференциального) типа. Вероятно, это связано с большей наглядностью и физической «прозрачностью» установления формы уравнений для скоростей изменения тех или иных параметров «здесь и сейчас» по сравнению с «интегральными» соотношениями, требующими «запоминания» предыстории воздействий. Следует сказать, что большинство известных авторам моделей материалов (особенно – в теории пластичности) принадлежат именно скоростному типу. Однако авторы не исключают соотношения «интегрального» типа из рассмотрения. С точки зрения классификации моделей материала выбор типа соотношений не представляется существенным, поэтому в дальнейшем для краткости будем оперировать только одним типом соотношений, например, «интегральным».

В соответствии с вышесказанным модель материала представляется соотношениями трех групп следующего вида:

(A) 
$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{F} (\boldsymbol{P}_{\gamma}, \boldsymbol{J}_{\beta}^{e}), \\ \boldsymbol{J}_{\beta}^{i} = \boldsymbol{R}_{\beta} (\boldsymbol{P}_{\gamma}, \boldsymbol{J}_{\delta}^{i}), \beta = \overline{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B}^{i}} \\ \boldsymbol{J}_{\beta}^{e} = \boldsymbol{C}_{\beta} (\boldsymbol{P}_{\gamma}, \boldsymbol{J}_{\delta}^{i}), \beta = \overline{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B}^{e}} \end{cases}$$

Полагаем, что все соотношения (А) удовлетворяют аксиомам детерминизма и независимости от системы отсчета, сформулированным в общей теории определяющих соотношений. Относительно принципа локальности ситуация несколько сложнее, поскольку в последние годы появилось большое количество работ по нелокальным теориям (в том числе – пластичности), поэтому здесь принцип локальности не вводится в число обязательных аксиом. Тем не менее, будем считать, что входящие в *P*<sub>2</sub> меры

деформированного состояния определяются градиентами места только первого порядка; нелокальные теории и теории для материалов порядка выше первого будут введены за счет различного типа конститутивных операторов.

ниже Хотя предлагаемая классификация может быть использована для широкого класса моделей материалов, В дальнейшем речь пойдет главным образом о теориях пластичности. Отметим, что провести четкие «границы» между различными подходами и способами построения ОС, их типами - задача чрезвычайно сложная (а возможно – не имеющая решения), поэтому необходимо учитывать известную условность любой классификации, отнесение ОС к тому или иному типу «по совокупности основополагающих преимуществу», ПО ДЛЯ рассматриваемого типа ОС признаков. В литературе по МСС (и МДТТ в частности) классификации подвергаются, как правило, «собственно» определяющие лишь соотношения  $(A_1),$ эволюционные И замыкающие уравнения относятся к отличительным признакам конкретных теорий, обычно называемых по имени их автора (авторов). Здесь классификация относится ко всем группам соотношений (А).

В теории пластичности одним их основных (в подавляющем большинстве случаев – единственным) классификационным признаком является используемый для формулировки ОС подход. В соответствии с эти признаком выделяют следующие подходы:

16

А1. Макрофеноменологический подход, основанный главным образом на корректно поставленных, грамотно проведенных и тщательно обработанных макроэкспериментов (в ряде случаев – для сложного нагружения). К числу теорий данного типа относятся теория упругопластических процессов А.А. Ильюшина (во всех ее формах), пластического частных теории течения (включая упругопластических многоповерхностные), теории малых деформаций, равно теории вязкопластичности, как теории теории вязкоупругости, ползучести И другие. Как правило, соотношения этого типа не содержат скрытых внутренних переменных и ЭУ для них, соотношения (А<sub>3</sub>) не содержат в правой части  $J^i_{\delta}$  и имеют достаточно простую форму (алгебраические или

дифференциальные соотношения). Рассматриваемый тип соотношений является наиболее часто употребляемым при решении подавляющего большинства прикладных задач МДТТ (и теории пластичности – в частности) и, вероятно, старейшим типом ОС. В то же время возможности мокрофеноменологического подхода далеко не исчерпаны и на сегодняшний день, однако сдерживаются возможностями экспериментальной техники и измерительной аппаратуры. Возможный прорыв на данном направлении связан с разработки принципиально необходимостью новых методов термомеханических измерения параметров И созданием соответствующей аппаратуры.

В литературе рассматриваемый подход обычно называется просто «феноменологическим». При этом он часто трактуется как подход, основанный на рассмотрении «входов – выходов» некоего «черного ящика», о содержимом которого исследователю якобы ничего не известно. Cподобным взглядом на макрофеноменологический подход вряд ли можно согласиться. Действительно, бесконечность множества возможных способов математического описания поведения любого материала не позволяет надеяться на правильное «угадывание» подходящей модели без тщательного анализа физики процесса деформирования, выделения основных механизмов на микро- и мезоуровнях. Подтверждением этому служат многочисленные беседы с создателями различных моделей материалов – все они прекрасно физические основные закономерности понимали поведения информацией материалов, владели 0 микроскопических исследованиях. Без этих знаний едва ли возможна корректная постановка макроэкспериментов, лежащих в основе данного подхода.

А2. Структурно-механический (или имитационный) подход, в основе которого лежит тщательный физический анализ механизмов материалов, введение ИХ деформирования для описания механических аналогов (упругих пружин, линейных и нелинейных элементов, элементов сухого трения) и построение вязких структурной схемы соединения различных элементов. Как правило, в рамках этого подхода вначале строится одномерная модель материала, которая затем обобщается (в большинстве случае без должного обоснования способа обобщения) на трехмерный случай. К теориям этого типа относятся модели Мазинга, Максвелла, Бингама, Фойхта и др. Структурно-механический подход также весьма распространен в МСС, что обусловлено в значительной степени его простотой и ясностью физической интерпретации модели материалов.

Во избежание неясностей отметим, что структурноотождествлять механические модели следует не конституитивными соотношениями, получаемыми на основе анализа микро- и мезоструктуры материала. В то же время в последние годы для построения структурно-механических моделей и объяснения получаемых результатов нередко привлекаются данные, полученные в физическом материаловедении и физике твердого тела (например, различие в модулях упругости и пределах текучести в стержневой модели Мазинга можно объяснить различной ориентацией зерен поликристалла).

Структурно-механический подход часто используется на стадии предварительного рассмотрения в макрофеноменологическом подходе для определения вида конститутивных соотношений. Необходимо подчеркнуть, что одной из труднорешаемых проблем структурно-механического подхода является задача обобщения одномерных соотношений на общий трехмерный случай, решение которой требует постановки и тщательного анализа результатов макроэкспериментов.

С другой стороны, для известных макрофеноменологических соотношений делаются попытки построить соответствующие структурно-механические модели, позволяющие придать более ясный физический смысл уравнениям и входящим в них параметрам. АЗ. Термодинамический подход, основанный на конструктивном использовании законов и соотношений термодинамики. В рамках представительный объем соответствующего этого подхода масштабного уровня рассматривается термодинамическая как система (ТДС), для которой вводятся термодинамические параметры и потенциалы, определяющие состояние ТДС. Затем с

использованием второго закона термодинамики (обычно - в виде Клаузиуса–Дюгема) неравенства И независимости термодинамических параметров определяется общий вид конститутивных уравнений. Для установления конкретной формы последних требуется записать используемые термодинамические явной форме, что делается с привлечением потенциалы в дополнительных **гипотез** физического характера, методов статистической неравновесной физики И термодинамики. настоящее время известны работы, в которых с помощью термодинамического подхода сформулированы конститутивные соотношения для упругопластических, вязкопластических, вязкоупругих тел, материалов с поврежденностью, материалов, испытывающих твердотельные фазовые переходы (в частности, керамик), и др. К основным достоинствам данного подхода следует отнести его строгость, существование обоснованных конституитивных математических процедур построения соотношений, автоматическое выполнение термодинамических ограничений. Основные в применении затруднения термодинамического подхода связаны с неоднозначностью выбора термодинамических параметров и термодинамических потенциалов, выбором и обоснованием конкретного вида термодинамических потенциалов. Однако значительные успехи в применении данного подхода к построению моделей материалов, достигнутые в последние десятилетия, позволяют говорить о его перспективности.

В то же время не следует переоценивать универсальность термодинамического подхода даже случае в наличия математического формализма установления вида конститутивных уравнений u конкретного вида В термодинамических потенциалов. настоящее время термодинамических формулировка потенциалов представляет собой более искусство, нежели раздел рациональной термодинамики сплошных сред, и потенциалы, пригодные для одних материалов, могут процессов u оказаться совершенно непригодными для других. Ситуация осложняется также не всегда ясным физическим смыслом используемых термодинамических потенциалов переменных для случаев u сложных термомеханических воздействий при рассмотрении структурнонеоднородных твердых тел (таких, как энтропия, свободная энергия и др.). Вероятно, не случайным является тот факт, что большинство конститутивных соотношений, полученных на основе термодинамического подхода, являются близкими аналогами или

«двойниками» соотношений, сформулированными на основе других подходов.

А4. Физический подход базируется на явном рассмотрении в модели материала процессов и механизмов, относящихся к меньшим, чем макроскопический, масштабным уровням, т.е. мезоскопическому, микроскопическому и атомному уровням. Для описания эволюции «носителей» тех или иных процессов деформирования, соответствующие как правило, вводятся континуальные (полевые) переменные формулируются И соответствующие эволюционные уравнения (А<sub>2</sub>). Для построения уравнений (А<sub>2</sub>) используются либо различные замыкающих процедуры осреднения (ориентационное, пространственное и т.д.), модели, либо термодинамические либо многоуровневые соотношения; не исключается их эвристическая формулировка явно выраженного феноменологического характера.

данного Ha основе подхода разработаны модели жесткопластического Тейлор, Бишоп, Хилл (Закс, дp.), И упругопластического (Линь, Венг и др.) тел, градиентные и нелокальные теории пластичности (Бервельер, Кратохвил и др.), структурно-аналитическая теория прочности и пластичности (В.А. Лихачев, В.Г. Малинин); широкий спектр моделей структурнонеоднородных материалов рассматривается в рамках физической мезомеханики томскими исследователями (В.Е. Панин, Ю.В. Гриняев, П.В. Макаров и др.). Данный подход является, по нашему мнению, наиболее эффективным и перспективным инструментом построения моделей материалов, позволяющим глубоко проникнуть в физическую суть происходящих в материале процессов; данное мнение находит подтверждение в неуклонном росте числа публикаций по этой тематике. Особое значение физический подход имеет при конструировании новых материалов с заданными функциональными свойствами.

К числу основных недостатков физического подхода следует отнести трудности полевого описания эволюции дефектной переменных, структуры, большое количество сложность постановки и проведения прямых экспериментов на микро- и мезоуровнях для пространственных тел. В связи с этим физический подход в настоящее время применяется в подавляющем большинстве случаев для анализа поведения именно материала, а не конкретных конструкций. Определенный оптимизм в вопросе о возможности применения физических моделей для решения краевых темпы задач ΜДΤΤ впечатляющие развития вселяют вычислительной техники и соответствующего системного и программного обеспечения, в особенности – связанные с параллельными вычислениями.

В рамках каждого из указанных подходов формулируются конститутивные соотношения, значительно отличающиеся своей математической структурой. Структура операторов правой части соотношений (А), естественно, существенным образом определяет свойства моделей, используемые методы и подходы к их анализу, равно как и методы решения соответствующих краевых задач, содержащих в своей математической постановке конститутивные уравнения. В связи с указанными обстоятельствами представляется целесообразным ввести в качестве второго классификационного признака тип операторов, входящих в (А).

Следует отметить, что каждая их групп ОС, ЭУ, ЗУ, входящих в (А), может иметь свой тип операторов, в связи с чем классификацию по данному признаку следовало бы провести отдельно для каждой из них. Здесь этого намеренно не предпринимается для большей наглядности и прозрачности; при необходимости исследователи, занимающиеся подобными проблемами, легко могут ввести такую детальную классификацию по аналогии с нижеприведенной.

Более того, в рамках одной и той же группы (ОС, ЭУ или ЗУ) используемые операторы могут относиться к разным типам. В этом случае будет использоваться либо «поглощение» более сложными типами операторов менее сложных (например, дифференциальные операторы можно рассматривать как частный случай интегродифференициальных), либо перечисление нескольких типов операторов.

Большинство из известных конститутивных уравнений включают следующие операторы:

Т1. Алгебраические (тензорно-алгебраические). К числу подобных соотношений относятся уравнения теории упругости, деформационной теории.

Т2. По отношению к временной переменной (или ее аналогу):

## - T2A. Дифференциальные.

К этому типу относятся соотношения вязких жидкостей, моделей Ривлина-Эриксена, упругопластического течения, жесткопластических и вязкопластических тел, некоторых теорий ползучести и другие.

## - Т2В. Интегральные.

К данному типу можно отнести уравнения широкого класса моделей вязкоупругих сред.

- Т2С. Интегро-дифференциальные.

Примерами подобных соотношений могут служить уравнения истокообразной формы А.А. Ильюшина, соотношений теории средней кривизны, эндохронной теории, некоторые модели жидкостей с затухающей памятью.

Т3. По отношению к пространственным переменным:

## - ТЗА. Дифференциальные.

Соотношения данного типа появились в теории пластичности в последнее время для описания – в первую очередь, – потери устойчивости пластического деформирования и носят название градиентных.

## – Т2В. Интегральные.

К числу подобных соотношений относятся уравнения так называемых нелокальных теорий.

Кроме приведенных хорошо известных в MCC операторов в механике структурно-неоднородных тел часто применяются и некоторые специальные операторы операторы осреднения. Особенно часто они используются при формулировке ЗУ (А<sub>3</sub>). К наиболее распространенным типам относятся операторы осреднения по времени, по пространству (объему), статистического осреднения; по математической структуре все они относятся к интегральным операторам (но обязательно не по временной или пространственным переменным).

## - Т2С. Интегро-дифференциальные.

Соотношения подобного типа авторам не известны, однако отсутствуют рациональные возражения против их использования (скажем, в нелокальных теориях в качестве независимых параметров можно включать градиенты мер напряженного и деформированного состояния, равно как и внутренних переменных).

Авторы не претендуют на полную завершенность и стройность классификации, ее оригинальность; скорее, она представляет собой попытку модифицировать известные подходы к классификации. Надеемся, что предлагаемая классификация окажется полезной с методической точки зрения.

# 2. Краткие сведения из физики твердого тела и материаловедения

Объектом исследования теории пластичности является анализ и описание поведения моно- и поликристаллических материалов. Особое внимание при этом отводится металлам, составляющим подавляющую часть (свыше 75%) известных в природе материалов, и сплавам, являющимся основным конструкционным материалом практически всех областей промышленности. Монокристаллические материалы имеют приблизительно идеальную кристаллическую решетку одного из семи классов во всем объеме исследуемого тела; в настоящее время существуют монокристаллических технологии изготовления деталей (например, «выращивание» монокристаллических лопаток газотурбинных двигателей Поликристаллы представляют собой расплава). совокупность ИЗ кристаллов (с размерами 10<sup>-3</sup>10<sup>-7</sup>м), разделенных границами и образующих зерна, субзерна, фрагменты, ячейки.

Остановимся на некоторых понятиях, широко используемых в физике твердого тела (ФТТ), физическом материаловедении, физике прочности и пластичности. Под фазой понимаются составные части исследуемого материала, которые для принятой степени детальности (точности) рассмотрения могут считаться однородными, т.е. имеющими одно и то же агрегатное состояние, пренебрежимо мало отличающийся состав, свойства, кристаллическую решетку. Фазы отделены друг от друга границами - областями с одним характерным размером (толщиной), существенно меньшим двух других. Системой называется совокупность разнородных областей материала (фаз), находящихся в равновесии. Под структурой понимается взаиморасположение, форма, размеры И взаимоориентация фаз материала, а также тип и размеры границ между ними. Структуру материала анализируют, как правило, на шлифованных поверхностях. При различают ЭТОМ макроструктуру, видимую невооруженным глазом, и микроструктуру, исследуемую с помощью оптических микроскопов с большим увеличением или электронных микроскопов. Для изучения макроструктуры в некоторых случаях используются поверхности излома образца. При анализе структуры на шлифах изготавливаются специальные макрошлифы (темплеты) или микрошлифы, поверхность которых получают с помощью шлифовки, полировки и последующего травления с применением специальных химических реактивов.

Как известно, кристаллические тела существенно анизотропны по теплофизическим и физико-механическим характеристикам, в связи с чем требуется введение некоторой «внутренней» системы координат для выделения направлений и плоскостей кристалла. Такую систему, связанную с расположением атомов в кристалле, называют кристаллографической системой координат. Рассмотрим простую кристаллическую решетку с распложенными в узлах атомами (ионами); один из узлов выберем в качестве начала координат О и соединим его векторами  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  с ближайшими узлами, не лежащими одновременно в одной плоскости (рис. 2.1). Введенная таким образом система координат  $Ox^l x^2 x^3$  с базисными векторами  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  (в общем случае не ортогональными и ненормированными) и является кристаллографической системой координат. Тогда любое направление  $l_0 = l/|l|$  полностью определяется компонентами вектора  $l_0$  или l в базисе  $t_i$ :

 $\boldsymbol{l} = l^i \, \boldsymbol{t}_i \,. \tag{2.1}$ 

В кристаллографии, ФТТ и материаловедении обычно используются только такие векторы направлений l, компоненты которых в базисе  $t_i$ суть целые числа, причем деленные на наибольший общий делитель. Совокупность определенных таким образом компонент называются  $[l^1 l^2 l^3].$ как В индексами Миллера И записываются случае отрицательных значений компонент знак «минус» ставится над индексом. примера рис 2.1 показаны несколько направлений И Для на соответствующих индексов Миллера; оси  $Ox^1$ ,  $Ox^2$ ,  $Ox^3$  имеют индексы Миллера [100], [010], [001] соответственно.



Рис. 2.1

Совокупность кристаллографических направлений, получающихся из заданного  $[l^1 l^2 l^3]$  ортогональными преобразованиями симметрии рассматриваемой кристаллической решетки, называются системой кристаллографических направлений и обозначаются как  $< l^1 l^2 l^3 >$ . Например, для кубической решетки система кристаллографических направления [100], [010], [001], [100], [010], [010], [001],

Наряду с направлениями в ФТТ и материаловедении широко используются обозначения атомных плоскостей (т.е. плоскостей, проходящих через совокупность атомов В узлах решетки), ДЛЯ определения которых вводят так называемые кристаллографические обозначения (также называемые индексами Миллера). Индексы Миллера для некоторой произвольной плоскости определяются следующим образом: находятся точки пересечения плоскости С осями кристаллографической координат, системы т.е. устанавливаются координаты этих точек в долях размеров ячейки по соответствующим направлениям, вычисляются обратные к ним величины и делятся на наибольший общий делитель, т.е. приводятся к целочисленным значениям направлений. знак (как И В индексах «минус» ставится нал соответствующим индексом). Полученная тройка чисел и представляет собой индексы Миллера плоскости. Примеры обозначения некоторых плоскостей приведены на рис. 2.2.



Рис. 2.2

Конкретная плоскость обозначается как  $(A_1A_2A_3)$ ; совокупность плоскостей, получаемых из некоторой заданной преобразованиями симметрии рассматриваемого типа кристалла, называется системой плоскостей и обозначается как  $\{A_1A_2A_3\}$ . Например, для кубической решетки система плоскостей  $\{111\}$  включает плоскости (111), (11T), (1T1), (TT1), (TT1), (TT1).

Заметим, что определение индексов Миллера плоскостей может быть осуществлено с использованием векторного произведения двух векторов, лежащих в данной плоскости; компоненты этого вектора в сопряженном базисе  $t^i = t_{i+1} \times t_{i+2} / [t_1 \cdot (t_2 \times t_3)]$  (индексы взяты по модулю 3), приведенные к целочисленным значениям, совпадают с индексами Миллера плоскости.

Введенная система индексов для кристаллографических направлений и плоскостей применима для любых кристаллов, однако для гексагональной решетки возникают определенные сложности определения

индексов Миллера. В связи с этим для гексагональных решеток применяются так называемые индексы Браве, представляющие совокупность четырех целых чисел (знак «минус», как и ранее, ставится над индексом). Для этого в базисной плоскости вводятся три оси с векторами «базиса»  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3 = -t_1 - t_2$ , четвертая ось совпадает с главной осью симметрии, базисный вектор ее обозначим как  $t_4$  (рис. 2.3).



Рис. 2.3

Нетрудно видеть, что компоненты любого вектора в разложении по этим четырем «базисным» векторам  $t_i$  должны удовлетворять следующему свойству:  $\mathbf{r} = r^i t_i$ ,  $r^3 = -(r^1 + r^2)$ ; иначе говоря, сумма первых трех индексов Браве всегда равна нулю. В качестве примера укажем индексы Браве осей  $Ox^i$ ,  $i = \overline{1,4}$ :  $Ox^1 - [21 T 0]$ ,  $Ox^2 - [T 2 T 0]$ ,  $Ox^3 - [T T 20]$ ,  $Ox^4 - [0001]$ ; направление 12' имеет индексы Браве [T 2 T 1].

Индексы Браве кристаллографических плоскостей определяются аналогично индексам Миллера; например, плоскость 122'1' имеет индексы Браве (10Т0), 233'2' - (01Т0), 344'3' -(Т100), 123456 - (0001), 133'1' - (1120). Указанное выше свойство индексов Браве сохраняется и для индексов плоскостей, т.е. сумма первых трех индексов равна нулю, что является прямым следствием равенства индексов плоскостей индексам направлений нормалей к этим плоскостям.

При анализе кристаллографии неупругих деформаций, в особенности - при рассмотрении фрагментации и текстурообразования, - широко используются так называемые **стереографические проекции**, с

помощью которых достаточно наглядно определяются кристаллографические направления, плоскости и углы.

Рассмотрим стереографические проекции на примере наиболее распространенных кристаллов кубической системы. Расположим элементарную ячейку в центре сферы (рис. 2.4) проведем экваториальную плоскость, разделяющую сферу на две полусферы - «северную» и «южную», максимально удаленные от экваториальной плоскости точки назовем полюсами (соответственно «северным» и «южным»). Выбирая любое направление (или плоскость, определяя ее нормалью) и продолжая его до пересечения со сферой, находим так называемую сферическую проекцию направления (плоскости). Для установления стереографической проекции соединяем прямой линией точку сферической проекции с полюсом противоположной полусферы; точка пересечения этой прямой с «экваториальной» плоскостью и определяет стереографическую проекцию направления (плоскости). На рис. 2.4 показан пример определения проекций для направления r: M - сферическая, M' - стереографическая проекция, П - экваториальная плоскость, P<sub>N</sub> и P<sub>S</sub> - «северный» и «южный» полюса.



На рис 2.5 приведены стереографические проекции основных направлений (плоскостей) кристалла кубической системы.



Следует отметить, что для кристаллов обычно нет необходимости рассматривать всю стереографическую проекцию, в силу свойств симметрии достаточно рассмотреть лишь ее часть. Так, для кристаллов высшего класса симметрии - кубического, - из изображенных на рис. 2.5 двадцати четырех стереографических треугольников достаточно рассмотреть лишь один, например, (001), (011), (Т11). Необходимо заметить, что индексы любой плоскости могут быть определены как сумма индексов двух плоскостей, лежащих по обе стороны от рассматриваемой, сферические проекции которых расположены на одной дуге большого круга.

Стереографические проекции широко используются в теории пластичности для анализа «разворотов» кристаллической решетки монои поликристаллов в процессе деформирования. Одним из классических примеров является исследование поворотов кристаллической решетки одноосном монокристалла растяжении (сжатии) при вдоль фиксированного в пространстве направления; в этом случае используется «обращенное движение», т.е. показывается не изменение направления кристаллографических направлений u плоскостей, а изменение кристаллографической проекции направления растягивающей возникающих при (сжимаюшей) силы. При исследовании текстур, различных процессах пластической обработки (деформирования) материалов, стереографические проекции используются при построении так называемых полюсных фигур (графического изображения функций распределения P<sub>nkl</sub>, представляющих собой вероятность совпадения нормали к выделенной кристаллографической плоскости с различными направлениями в образце (или характерными направлениями исследуемого процесса)).

Предметом теории пластичности является изучение поведения только твердых тел, поэтому здесь не рассматриваются расплавы и процессы кристаллизации. В то же время при изучении поведения конкретных материалов следует помнить, что их свойства весьма существенно зависят от процессов, предшествующих анализируемому деформирования твердотельного образца. процессу детали или конструкции. Так, свойства сплавов одного химического состава могут существенно отличаться при различных условиях кристаллизации, режимах охлаждения после кристаллизации, возможной термообработки. Следует отметить также, что многие кристаллические материалы в зависимости от температуры и напряжений могут существовать в различных кристаллических формах или полиморфных модификациях, причем это свойство относится как к «чистым» (однокомпонентным) материалам, так и многокомпонентным. При полиморфных превращениях материалы, не изменяя химического состава, испытывают изменение типа кристаллической решетки; направление процесса перехода определяется термодинамическими условиями устойчивости, записанными обычно в виде условий экстремальности соответствующего (в зависимости от условий сопряжения ТДС с окружающей средой) термодинамического потенциала. Например, при сопряжении ТДС по температуре и термодинамическим параметрам состояния обычно используется свободная энергия Гельмгольца. При отсутствии внешних для ТДС полиморфные модификации обозначают напряжений индексами греческого алфавита α, β, γ.. по мере роста температуры, при которой данная модификация является устойчивой. Для чистых металлов этот переход осуществляется при постоянной температуре, называемой критической (точкой), и сопровождается поглощением (эндотермический) или выделением (экзотермический твердотельный фазовый переход) тепла. Заметим, что это свойство используется при построении фазовых диаграмм (диаграмм состояния), широко используемых в физическом материаловедении, мезо- и микромеханике.

Способность к полиморфным превращениям испытывают такие металлы, как железо  $(Fe_{\alpha} - Fe_{\gamma})$ , кобальт  $(Co_{\alpha} - Co_{\beta})$ , стронций  $(Sr_{\alpha} - Sr_{\beta})$ , марганец  $(Mn_{\alpha} - Mn_{\beta} - Mn_{\gamma} - Mn_{\delta})$ , титан  $(Ti_{\alpha} - Ti_{\beta})$  и многие другие, а также неметаллы и химические соединения, например, некоторые керамики. В ряде случаев, учет полиморфных превращений является необходимым, поскольку служит лидирующим или важным аккомодационным механизмом неупругого деформирования. В литературе для обозначения данного механизма неупругого деформирования и

соответствующих моделей материала используется термин «трансформационная пластичность» (или «пластичность превращения»). Особое значение полиморфные превращения имеют при исследовании явления сверхпластичности (трансформационной сверхпластичности), проявляющегося для поликристаллических металлов и керамик.

Процесс полиморфного превращения начинается с образования правило, в областях неоднородности зародыша новой фазы, как границах зерен И субзерен, характеризующихся высокими концентрациями напряжений. В дальнейшем зародыши новой фазы растут за счет отрыва отдельных атомов или их групп от зерен старой фазы и присоединения к решетке новой фазы; решетка новой фазы имеет вполне определенную ориентацию по отношению к решетке исходной фазы. Заметим, что при фазовом превращении материалы испытывают резкое теплофизических физико-механических свойств изменение И (теплоемкости, теплопроводности, удельного объема, модулей упругости и т.д.). При анализе таких процессов необходимо учитывать возникающие внутренние напряжения, способные содействовать или препятствовать процессу превращения.

Подавляющее большинство конструкционных материалов представляют собой не чистые (однокомпонентные) металлы, а сплавы, состоящие из двух и более компонентов. В сплавах в зависимости от вида физико-химического взаимодействия на атомно-молекулярном уровне фазы представляют собой или твердые растворы, или химические соединения. Твердыми растворами называются такие фазы, в которых основной компонент (растворитель) сохраняет свою кристаллическую решетку, а атомы остальных компонент («примеси») располагаются в решетке растворителя, искажая ее параметры. При этом существуют твердые растворы замещения и внедрения. В твердых растворах замещения атомы растворенных компонентов размещаются в узлах кристаллической решетки растворителя («замещают» последние). Известно, что в определенной степени все металлы способны растворяться друг в друге. В некоторых случаях возможно неограниченное растворение одних компонентов в других, тогда сплавы могут образовывать непрерывный ряд твердых растворов. Для этого компоненты должны иметь одинаковый тип кристаллической решетки, различие атомных радиусов не должно превышать 8-15%, компоненты должны принадлежать одной или смежным группам периодической системы элементов (т.е. иметь близкое строение валентной оболочки электронов).

В общем случае атомы растворенных компонентов могут хаотически располагаться в узлах решетки растворителя. Однако при определенных режимах термообработки атомы растворенных компонентов могут занять вполне определенные, устойчивые при относительно низких температурах положения в узлах кристаллической решетки растворителя, т.е. образовывать упорядоченные твердые растворы (сверхструктуры). В

отличие от химических соединений упорядоченность в сверхструктурах сохраняется только до определенной температуры (точки Курнакова), выше которой фаза превращается в неупорядоченный твердый раствор. Можно рассматривать упорядоченные твердые растворы как промежуточные фазы (между неупорядоченными твердыми растворами и химическими соединениями).

В твердых растворах внедрения атомы растворенных компонентов размещаются в междоузлиях (пустотах) кристаллической решетки растворителя, стремясь занять наибольшие по объему пустоты. При этом кристаллическая решетка растворителя обычно искажается. Следует отметить, что атомы растворенных компонент при наличии краевых растянутых под дислокаций размещаются В областях краями экстраплоскостей, создавая при этом достаточно прочные соединения с дислокациями, называемые атмосферами Котрелла. С отрывом атмосфер Котрелла наблюдаемый дислокаций OT связывают экспериментально эффект прерывистой пластической деформации.

Химические соединения и сходные с ними по свойствам фазы в сплавах отличаются большим разнообразием. Обозначенные по законам нормальной валентности химические соединения компонентов А и В имеют формулу  $A_i B_i$  (i, j - целые числа, не имеющие общего делителя), обладают свойствами и решеткой, отличающимися от свойств и решеток компонентов. Известно большое число соединений металлов друг с другом (интерметаллидов или интерметаллических соединений), связь в таких соединениях обычно металлическая. Широкий класс соединений образуют переходные металлы (Fe, Co, Ni, Ti, Mo и т.д.) с углеродом, азотом, бором и водородом (карбиды, нитриды, бориды и гидриды); обычно они называются фазами внедрения. Из других соединений отметим фазы Лавеса (с формулой АВ<sub>2</sub>, образующихся при отношении атомных радиусов  $R_A/R_B = 1.1 - 1.6$ ; примерами могут служить  $MgZn_2$ ,  $MgNi_2, MgCu_2, TiCr_2, TiMn_2, TiBe_2$  и др.) и электронные соединения (имеющими определенные отношения числа валентных электронов к числу атомов; примеры CuZn,  $Cu_3Al$ , FeAl,  $Cu_5Zn_8$ ,  $CuZn_3$ ,  $Cu_3Si$  и др.). Как видно из приведенной краткой справки, сплавы представляют собой практически неограниченное множество материалов, причем лаже несущественное изменение концентрации различных компонентов в сплаве может приводить к весьма заметному различию теплофизических и физико-механических характеристик материала. Иначе говоря, многообразие возможных форм организации материи на микроуровне, атомном и нижележащих уровнях, видов связей микрочастиц в кристаллах, типов кристаллических решеток, различий фазового состава порождает многообразие свойств материала на макрооуровне.

Однако «богатство внутреннего мира» кристаллических материалов не исчерпывается приведенными выше составляющими, относящимися

главным образом к «идеальным» кристаллам (монокристаллам или зернам, субзернам в поликристалле). В первую очередь это относится к механизмам неупругого деформирования моно- и поликристаллических материалов. Анализ процесса пластического деформирования показал недостаточность рассмотрения кристаллических материалов как идеальных кристаллов.

Впервые так называемая «теоретическая прочность на сдвиг» (напряжение текучести при сдвиге) была определена Я.И. Френкелем, исходя из простой модели смещаемых друг относительно друга двух цепочек атомов. При этом была получена величина напряжения сдвига  $\tau_{mean} = G/2\pi$ , где G - модуль Юнга; позднее указанное значение было  $\tau_{meop} = G/30$ . Сопоставление теоретической прочности с уточнено: данными экспериментальных исследований показало, что теоретическое значение на 1-3 порядка выше экспериментально измеренного. Столь явное несоответствие требовало кардинального пересмотра механизмов пластического деформирования. Впервые такой механизм был предложен в 1934 г. Поляни, Орованом и Тейлором, которые независимо друг от друга ввели в ФТТ представление о линейных дефектах кристаллических тел - дислокациях. Именно с этого момента начинается новая эра в изучении физики и механики неупругого деформирования как процессов эволюции и взаимодействия дефектов кристаллических тел, развития дефектных структур.

Конечно, дислокации являются не единственными дефектами в реальных моно- и поликристаллических материалов; к настоящему времени в прямых микроскопических исследованиях обнаружены десятки различных видов дефектов. Обычно используемая в ФТТ и физическом материаловедении классификация основана на «размерности» дефектов, точнее - на характерных размерах несовершенств, искажений идеального строения кристаллов, вносимых теми или иными дефектами. В связи с этим классификационным признаком выделяются нульмерные (точечные), (линейные), одномерные двумерные (планарные) И трехмерные (объемные) дефекты. Каждый из этих типов дефектов может вносить свой вклад в деформирование материала, служить «носителем» того или иного основного или аккомодационного механизма деформирования, образовывать дефектные субструктуры, вступать во взаимодействие с другими типами дефектов.

Точечные дефекты вызывают искажение кристаллической решетки на расстояниях нескольких характерных размеров кристаллической ячейки каждому направлений). Наиболее (по ИЗ важными И распространенными точечными дефектами являются вакансии (узлы с удаленными атомами) и межузельные атомы. При удалении атома из узла (пору) происходит возникновение пары дефектов, междоузлие называемой дефектом Френкеля или френкелевской парой. Часто в литературе дефектами Френкеля называют межузельные атомы, а вакансии - дефектами Шоттки. Заметим, что в ионных кристаллах образование френкелевских пар обусловлено требованием сохранения нейтральности кристалла; образование дефектов Шоттки в связи с указанным требованием должно также происходить парами - за счет удаления пар ионов противоположного знака.

термодинамических Из оценок следует, равновесная что концентрация вакансий в кристаллах отлична от нулевой; иначе говоря, бездефектных (идеальных) кристаллов в природе не существует. Кроме того, с энергетической точки зрения, вакансиям выгодно образовывать бивакансии, тривакансии и т.д., вакансионные кластеры. Большие плоские скопления вакансий (в виде дисков) после их схлопывания приводят к образованию дислокационной петли. Избыточная (неравновесная) концентрация вакансий может быть получена при быстром охлаждении кристаллических тел (закалка, например).

В силу высокой энергии образования межузельных атомов (по образования вакансий) сравнению энергией ИХ равновесная С концентрация близка к нулю даже при температурах, близких к температуре плавления. Как и вакансии, межузельные атомы могут образовывать различные устойчивые конфигурации. Для однокомпонентных кристаллов наиболее известными соединениями являются гантели (вытеснение межузельным атомом атома из узла решетки и образование с ним симметричной пары с центром тяжести в узле) и краудионы (цепочки атомов в направлении плотнейшей упаковки, содержащие один лишний атом на 5-10 межатомных расстояний). Подобно вакансиям, межузельные атомы могут образовывать также плоские скопления (диски), края которых также представляют собой петли дислокаций. Избыточная (неравновесная) концентрация межузельных атомов создается при облучении кристаллов высокоэнергетическими потоками микрочастиц (электронов, протонов и т.д.).

Кроме указанных механизмов образования точечных дефектов их возникновение происходит в процессах неупругого деформирования и связано с эволюцией других типов дефектов.

К числу важнейших «носителей» неупругого механизмов деформирования MOHOи поликристаллов одномерные относятся (линейные) дефекты кристаллической решетки дислокации. Два винтовые. основных дислокаций краевые Основной типа -И характеристикой дислокации является вектор Бюргерса, определяющий различие замкнутого контура в бездефектном кристалле и замкнутого контура, окружающего линию дислокации (контур Бюргерса).

Схематично образование краевой дислокации можно представить следующим образом: в идеальном кристалле делается плоский надрез, в который вставляется лишняя полуплоскость (экстраплоскость), после чего системе дают возможность отрелаксировать. После релаксации

правильное строение кристалла восстанавливается во всем объеме, за исключением узкой области (с размерами в несколько межатомных примыкающей расстояний), К краю экстраплоскости. Плоскость, перпендикулярная экстраплоскости И определяемая нормалью n, называется плоскостью залегания или плоскостью скольжения краевой вектор Бюргерса краевой дислокации дислокации; расположен плоскости залегания и определяет направление возможного движения (скольжения) дислокации. Край экстраплоскости определяет положение линии дислокации, вдоль которой направляется единичный вектор *l*, так, что тройка (*b*,*l*,*n*) является правой тройкой. Плоскость залегания краевой дислокации, таким образом, совпадает с плоскостью (b, l). В зависимости экстраплоскости ОТ расположения выделяют положительные И отрицательные краевые дислокации, обозначаемые соответственно как  $\perp$  и T.

Винтовую дислокацию схематично вводят обычно следующим образом: в цилиндрическом бездефектном кристалле делается радиальный надрез до оси цилиндра; вдоль пересечения плоскости надреза и боковой поверхности цилиндра края надреза смещаются на одно межатомное расстояние и соединяются, после чего дают системе отрелаксировать. В полученной таким образом конфигурации нарушения правильного строения кристалла сосредоточено в узкой области вблизи оси цилиндра, которая является линией винтовой дислокации и определяется единичным вектором касательной l. Вектор Бюргерса b винтовой дислокации параллелен линии дислокации. В зависимости от направления вектора Бюргерса по соглашению вводятся положительные и отрицательные винтовые дислокации, обозначаемые как  $\frac{8}{3}$  и  $\frac{8}{3}$  соответственно.

В реальных кристаллах дислокации в общем случае имеют криволинейную форму, в каждой точке линии дислокации могут присутствовать краевые и винтовые составляющие. Часто дислокации представляют собой замкнутые петли. При этом из ФТТ известны следующие геометрические свойства дислокаций: вектор Бюргерса постоянен в каждой точке данной дислокации; дислокации не могут обрываться в кристалле, они могут либо выходить на поверхность кристалла, либо образовывать замкнутые петли, либо разветвляться; в каждой точке ветвления суммарный вектор Бюргерса исходящих из узла дислокаций равен нулевому вектору.

Несмотря на то, что дислокации не являются равновесными дефектами, в реальных кристаллических материалах всегда присутствует значительное количество дислокаций. Количественной мерой при этом служит плотность дислокаций, определяемая суммарной длиной дислокаций в единице объема. Даже в хорошо отожженных кристаллах плотность дислокаций составляет  $10^5-10^7$  см/см<sup>3</sup> (см<sup>-2</sup>), доходя в деформированных кристаллах до  $10^{12}-10^{14}$  см<sup>-2</sup> ( $10^4-10^6$  км в 1 мм<sup>3</sup>!).

Дислокации в кристаллических материалах образуются уже на стадии кристаллизации из расплавов, растворов или газообразной фазы. В процессах термообработки возможными механизмами образования дислокаций (в виде петель) являются диффузионные процессы, приводящие к возникновению дисков вакансий и межузельных атомов.

наиболее важными являются источники дислокаций, Однако инициируемые деформацией кристалла (точнее - источники размножения дислокаций). К числу наиболее эффективных из них относятся источники Франка-Рида (закрепление сегментов дислокаций на сильных препятствиях и испускание закрепленным сегментом под действием приложенных напряжений дислокационных петель) и двойное поперечное скольжение винтовых дислокаций (изменение плоскости скольжения винтовой дислокации с последующим переходом в плоскость скольжения, параллельную исходной; механизм подобен механизму Франка-Рида, однако закрепление сегмента дислокации в новой плоскости скольжения осуществляется за счет неподвижных участков дислокации краевой или смешанной ориентации, расположенных в плоскости поперечного скольжения).

В последние 15-20 лет в ФТТ, физическом материаловедении, мезомеханике, теории пластичности большое внимание уделяется так называемым ротационным механизмам деформирования, осуществляемым за счет взаимных поворотов структурных элементов (конгломератов зерен, зерен, субзерен, фрагментов ячеек, блоков) кристаллических материалов. В связи с этим даже в столь кратком изложении вопросов физики неупругого деформирования нельзя не упомянуть об еще одном типе линейных дефектов - дисклинациях. Схематично введение дисклинации может быть осуществлено следующим образом. Построим в теле некоторый произвольный замкнутый контур L с единичным вектором касательной  $\tau$ , указывающим направление обхода контура; натянем на этот контур произвольную регулярную поверхность S с единичной нормалью n(r). Мысленно осуществим разрез вдоль поверхности S и повернем без деформаций поверхности разреза относительно друг друга на некоторый угол  $\Omega$  вокруг оси, проходящей через произвольно выбранную точку О. Образовавшиеся при этом пустоты заполним материалом, а из возникших наложений извлечем «лишний» материал, соединим берега разреза, после чего дадим системе возможность отрелаксировать. Полученный таким образом дефект называется дисклинацией. В случае сплошной среды полученная система не имеет геометрически выделенных областей; напряженно-деформированное состояние не имеет особенностей в рассматриваемой области за исключением малой окрестности контура L, т.е. физически выделенным является контур L. В силу этого дисклинация относится к линейным (одномерным) дефектам.

Отметим, что если берега разреза сдвинуть относительно друг друга на постоянный вектор **b**, получаем уже упомянутый выше дефект - дислокацию (с вектором Бюргерса **b**), точнее - дислокационную петлю. Оба типа дефектов - дислокации и дисклинации относятся к классу дислокаций Вольтерра (или дисторсий). В случае произвольных смещений поверхностей разреза получаемый дефект называется дислокацией Сомилианы.

Вектор *Ω*, направленный вдоль оси поворота и по модулю равный углу поворота, называют вектором Франка, вектором Вольтерра или мощностью дисклинации. случае если  $\Omega$  перпендикулярен В τ. рассматриваемый участок дисклинации представляет собой так называемую дисклинацию кручения; если  $\Omega$  параллелен  $\tau$ , то дисклинация называется дисклинацией наклона или клиновой дисклинацией. В общем случае в каждой точке дисклинации можно определить составляющие дисклинации кручения и наклона.

В кристаллических структурах для отсутствия кристаллографически выделенных поверхностей поворот должен осуществляться на угол, соответствующий симметрии решетки (обычно -  $\pi/2$  или  $\pi/3$ ); в этом случае дисклинацию называют полной или совершенной. В случае, если вектор Франка не согласуется с симметрией решетки, возникает частичная дисклинация, которая уже не может рассматриваться как линейный дефект; имеет место поверхностный дефект, подобный дефекту упаковки.

К промежуточному (между линейными и поверхностными) типу дефектов кристаллической решетки можно отнести дефект упаковки, который можно рассматривать как «растянутую» на несколько межатомных расстояний дислокацию. Поверхность дефекта упаковки отделяется от остальной части кристалла выделенной линией, называемой частичной дислокацией, и обозначается как и . Для частичных дислокаций вектор Бюргерса не совпадает с вектором. равным межатомным расстояниям. Частичные дислокации с вектором Бюргерса, лежащим в плоскости их скольжения, называются дислокациями Шокли. Частичные дислокации с вектором Бюргерса, не лежащим в плоскости их скольжения, называют (сидячими) дислокациями Франка. Важнейшей характеристикой способности кристаллического материала к образованию дефектов упаковки (а, следовательно, и расщепленных дислокаций) и определяющей ширину дефекта упаковки, является энергия дефекта упаковки (ЭДУ). Численно ЭДУ равна силе отталкивания частичных дислокаций (на единицу длины), или силе поверхностного натяжения дефекта упаковки; чем ниже ЭДУ, тем больше ширина дефекта упаковки.

С позиций чередования плотноупакованных слоев дефект упаковки представляет собой нарушение правильного чередования слоев на некотором конечном участке поверхности. Так, в ГЦК металлах плотноупакованные слои {111} образуются правильным чередованием
трех одинаковых (но сдвинутых в плоскости {111}) слоев: ...ABCABC..., т.е. «шары» атомов второго слоя располагаются в лунках «шаров» первого слоя, «шары» третьего слоя расположены в лунках второго слоя, атомы четвертого слоя располагаются над атомами первого слоя. Если на некотором участке конечной протяженности изъять атомы одного из слоев, например C, и «склеить» слои с обеих сторон от него, то на данном участке чередование слоев будет ...ABABC...(типичным для ГПУ решетки).

Отметим, что ширина расщепленной дислокации под действием приложенных напряжений может быть уменьшена до нуля, т.е. расщепленная дислокация может быть превращена в обычную.

Весьма важное влияние на процессы неупругого деформирования оказывают двумерные (поверхностные) дефекты дислокационной и недислокационной природы. К их числу относятся плоские скопления и стенки дислокаций, границы двойников, субзерен и зерен, внешняя поверхность кристалла. Искажения кристаллической решетки в этом случае составляет несколько межатомных расстояний в направлении нормали к поверхностному дефекту, два других размера можно отнести к микро- и мезоскопическим (и даже макроскопическим) масштабам.

Наконец, трехмерные дефекты представляют собой области искажения правильного кристаллического строения с размерами вдоль каждого из трех направлений, превосходящими масштаб атомного уровня. К числу таких дефектов в физическом материаловедении и мезомеханике относят дисперсные частицы с отличной от основного материала («матрицы») кристаллической решеткой (выделение второй фазы), аморфные включения, нарушения сплошности (поры, трещины).

#### Замечание. Конечно, п

Конечно, приведенная классификация дефектов также является условной, основанной на рассмотрении материала с макроскопических позиций. Переход на другой масштабный уровень требует пересмотра и классификации дефектов. Например, при анализе процессов деформирования на атомном уровне практически все указанные дефекты следует рассматривать как трехмерные.

Следует отметить, что, несмотря на возможность определения, двумерных u трехмерных дефектов например, линейных, как совокупности точечных дефектов, введение последних продиктовано не только стремлением упростить математическое описание дефектной структуры. Самым важным аргументом, на наш взгляд является проявление дефектами более сложной, чем точечные, структуры свойств, присущих системе, не проявляемых составляющими ee элементами (например, точечными дефектами, с помощью которых можно ввести дислокацию). Каждый из этих дефектов способен вступать во взаимодействие как с дефектами того же типа, так и с

дефектами других типов. И в этих взаимодействиях каждый дефект выступает как единый объект, как система.

Остановимся кратко на механизмах неупругого деформирования, реализованных соответствующими «носителями» - дефектами, описанными выше.

В случае наличия в кристаллическом теле градиентов концентрации точечных дефектов, которые могут создаваться за счет приложенных напряжений, в теле возникают направленные диффузионные потоки межузельных атомов и вакансий. Выход межузельных атомов и вакансий на соответствующие поверхности кристаллического тела приводит к изменению его формы, т.е. к деформациям (диффузионной пластичности ползучести). Диффузия является термически активируемым или процессом, в связи с чем диффузионная пластичность (или ползучесть) существенно зависит от температуры тела. Следует заметить, что в хорошо отожженных монокристаллах скорости деформации за счет диффузионного массопереноса весьма низки в силу значительной величины среднего диффузионного пути (расстояния, проходимого точечным дефектом до выхода на поверхность). В реальных моно- и поликристаллах диффузия существенно облегчается наличием дефектов различной природы, диффузионный массоперенос осуществляется между соседними дислокациями, вдоль линий дислокаций, по границам зерен и субзерен, по поверхности образца. Диффузионная ползучесть была обнаружена и объяснена в 1963г. независимо Коблом и Лифшицем, в силу чего носит название ползучести Кобла-Лифшица.

Как видно из сказанного выше, уже в этом случае деформирования за счет движения простейших дефектов - межузельных атомов и вакансий, - возникает взаимодействие дефектов различных типов. Как показывают многочисленные данные микроскопических исследований, моделирования на мезо-, микроскопическом и атомном уровнях, подобное взаимодействие дефектов различных типов присутствует в любых процессах неупругого деформирования и является источником чрезвычайно богатого «внутреннего мира» кристаллических тел. Это, в свою очередь, порождает многообразие поведения на любом масштабном уровне.

Важнейшие механизмы неупругого деформирования большинства кристаллических тел связаны с движением и взаимодействием краевых и Возникающие деформирования винтовых дислокаций. процессе В являются в большинстве случаев дислокационные структуры определяющим факторов поведения материалов. Большинство физических теорий пластичности основаны на анализе движения, размножения и взаимодействия дислокаций друг с другом, В ряде случаев взаимодействия дислокаций с другими типами дефектов. Более подробно движение и взаимодействие дислокаций будет рассмотрено в разделе 6,

посвященном физическим теориям пластичности. Здесь остановимся лишь на кратком описании эволюции дислокационных субструктур.

Важнейшими факторами, влияющими на образование и эволюцию различных типов дислокационных субструктур, являются:

- характер, сложность нагружения (деформирования);
- температура и скорость деформации;
- свойства кристаллического тела и дислокаций (ЭДУ, напряжения трения, расщепленность дислокаций и др.);
- плотность дислокаций и механизмы взаимодействия с дислокациями и другими типами дефектов.

С ростом деформации наблюдаются следующие основные дислокационные субструктуры:

- 1. Хаотически распределенные слабо взаимодействующие дислокации (при невысокой плотности дислокаций, множественном скольжении, высокой ЭДУ).
- 2. Скопление дислокаций на барьерах (в условиях затруднения поперечного скольжения и переползания, при средней ЭДУ, низких температурах, малом числе систем скольжения).
- 3. Дипольные или мультипольные образования (средние значения плотности дислокаций, затрудненности поперечного скольжения и переползания).
- 4. Однородная сетчатая дислокационная структура (наличие не менее двух систем скольжения, затрудненность переползания и поперечного скольжения, сравнительно низкие температуры).
- 5. Клубковые соединения (жгуты, косы) образуются при наличии нескольких активных систем скольжения, высокой ЭДУ, большой концентрации и подвижности точечных дефектов, возможности переползания и поперечного скольжения.
- 6. Ячеистая структура, образуемая плоскими скоплениями и стенками дислокаций; условия соответствуют п.5.
- Полосовая дислокационная структура, образуемая системой параллельных дислокационных субграниц (дисклинационного типа), возникает в условиях высокой плотности дислокаций, интенсивной аннигиляции дислокаций, возможности переползания и поперечного скольжения.
- 8. Фрагментированная субструктура формируется при относительно высоких степенях деформации, образована разориентированными ячейками с непрерывным изменением разориентировок по мере роста деформации.

Отметим, что приведенная классификация дислокационных субструктур не является единственной; здесь она приведена с целью продемонстрировать многообразие дислокационных образований. Как показывают микроскопические исследования, обычно «новые»

субструктуры образуются в недрах «старой» дислокационной структуры и постепенно поглощают последнюю.

В материалах с малым числом систем скольжения (ГПУ), с низкой ЭДУ, при относительно низких температурах одним из важнейших механизмов неупругого деформирования является двойникование. Двойникование представляет собой процесс локализованного сдвига, так что решетка в двойниковой области является зеркальным отражением решетки В несдвойникованном кристалле относительно плоскости двойникования (габитусной плоскости двойника). В качестве последних выступают кристаллографические обычно плоскости с низкими индексов Миллера. Двойниковые прослойки значениями занимают обычно небольшие, но четко выделенные примерно параллельными плоскостями области внутри кристалла. Образование двойника часто происходит с высокой скоростью И сопровождается ЗВУКОВЫМИ эффектами.

Из других механизмов деформирования следует отметить трансформационный механизм зенограничного проскальзывания. И Трансформационная пластичность (пластичность превращения) наблюдается в кристаллах, способных к полиморфным превращениям (твердотельному фазовому переходу). К их числу относятся большое количество сплавов на основе железа (стали), керамические и другие Зернограничное проскальзывание материалы. является важнейшим механизмом деформирования поликристаллов с малым размером зерна; в частности, зернограничное проскальзывание является одним из главных механизмов деформирования в условиях сверхпластичности.

# 3. Теория упругопластических процессов А.А. Ильюшина

Основные положения, понятия и гипотезы теории упругопластических процессов (УПП) рассматривались подробно в курсе МСС, поэтому здесь лишь напомним эти сведения. При необходимости читатель может обратиться к достаточно детальному изложению теории в работах [1, 2, 3]. Несмотря на то, что исторически первыми появились теории пластического течения, изложение в качестве первой теории УПП обусловлено широким использованием в современных теориях пластичности понятий, определений, геометрической интерпретации, впервые введенных именно в рассматриваемой теории.

Для большинства материалов с достаточной обоснованностью может использоваться гипотеза о линейной связи первых инвариантов тензора напряжений Коши  $\sigma$  и тензора малых деформаций  $\varepsilon$  (или средних напряжений  $\sigma$  и деформаций  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ =K $\varepsilon$ ). В связи с этим дальнейшее рассмотрение может быть сосредоточено на связи девиаторных составляющих тензоров напряжений S и деформаций  $\epsilon$ .

В последние годы в работах по теории пластичности широко используется предложенное А.А. Ильюшиным векторное (геометрическое) представление процесса деформирования (нагружения). Согласно этому представлению, пяти независимым компонентам девиатора деформаций  $e_{ij}$  (напряжений  $S_{ij}$ ) во взаимно однозначное линейное соответствие ставятся пять компонент вектора деформаций  $\mathfrak{I}_i$  (напряжений  $\Sigma_i$ ), которые относят к векторам ортонормированного, фиксированного в соответствующем пространстве (деформаций или напряжений) базиса  $a^i$  $(i = \overline{1,5})$ . Векторы деформаций  $\mathfrak{I}$  и напряжений  $\Sigma$  определяются как

$$\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}_i \boldsymbol{a}^i, \ \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_i \boldsymbol{a}^i, \tag{3.1}$$

 $\mathbf{\mathfrak{I}} \in \mathcal{F}^{(5)}, \ \mathbf{\mathfrak{I}} \in \mathcal{I}^{(5)}, \ \mathcal{F}^{(5)}$  и  $\mathcal{I}^{(5)}$  - пятимерные векторные пространства деформаций и напряжений соответственно. Отметим, что линейное соответствие  $\mathbf{e} \sim \mathbf{\mathfrak{I}}, \ \mathbf{S} \sim \mathbf{\mathfrak{I}}$  выбирается обычно таким образом, что модули  $|\mathbf{\mathfrak{I}}|$  и  $|\mathbf{\mathfrak{I}}|$  векторов деформаций и напряжений равны соответственно интенсивностям деформаций  $\varepsilon_u$  и напряжений  $\sigma_u$ .

При произвольном процессе деформирования вектор-функция  $\mathfrak{I}(t)$  описывает в пространстве  $\mathfrak{I}^{(5)}$  некоторую линию, называемую **траекторией деформации** (годограф вектор-функции  $\mathfrak{I}(t)$ ). Соответствующий вектор напряжений  $\Sigma(t)$  в пространстве  $\Sigma^{(5)}$  определяет **траекторию нагружения**. Длина дуги траектории деформации,

отсчитываемая от начала процесса деформирования, определяется как

$$s = \int_0^{1/2} \left(\frac{2}{3} d\boldsymbol{e} : d\boldsymbol{e}\right)^{\frac{1}{2}} = \int_0^{1/2} \left(\frac{2}{3} \boldsymbol{e} : \boldsymbol{e}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau = \int_0^{1/2} \left(\frac{2}{3} \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Поскольку в теории пластичности время явным образом не должно присутствовать, обычно в качестве параметра, характеризующего течение процесса деформирования, используется именно длина дуги траектории деформации. В этом случае полагается, что все параметры процесса определяются как функции длины дуги *s* (например  $\Sigma = \Sigma(s)$ ,  $\theta = \theta(s)$  - температура,  $\sigma = \sigma(s)$ - среднее напряжение и т.д.).

Одним из основных понятий теории УПП является понятие образа процесса нагружения. Образом процесса нагружения в пространстве  $\mathcal{P}^{(5)}$  называется траектория деформации  $\mathfrak{P}(s)$  и приписанные каждой точке траектории характеристики процесса ( $\Sigma(s)$ ,  $\sigma(s)$ ,  $\theta(s)$  и другие). Траектория деформации полагается заданной непрерывной векторзначной функцией параметра s (или t) с непрерывными производными до пятого порядка за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва производных. Для компонентного представления вектора напряжений в этом случае удобно использовать так называемый естественный ортогональный репер Френе  $p^i$  ( $i = \overline{1,5}$ ). Для построения пятигранника Френе используется процедура ортогонализации системы пяти линейно независимых векторов  $r^{i} = \frac{d^{i} \vartheta}{ds^{i}}$   $(i = \overline{1,5})$ . Заметим, что  $r^{1} = p^{1}$  - единичный вектор, касательный к траектории, вектор  $r^{2}$ ортогонален **p**<sup>1</sup> (нормаль) и лежит в соприкасающейся плоскости. Ориентация вектора напряжений определяется углами  $\vartheta_i$ :  $\mathcal{G}_i = \arccos\left(\mathbf{p}^i \cdot \sum_{|\Sigma|}\right), \quad i = \overline{1,5}, \quad \text{из которых}$  только четыре являются независимыми. Приведем известное из дифференциальной геометрии соотношение для производных  $d\mathbf{p}^i/d\mathbf{s}$ :

$$\frac{d\mathbf{p}^{i}}{ds} = -\partial \ell_{i-1} \mathbf{p}^{i-1} + \partial \ell_{i} \mathbf{p}^{i+1}, \qquad (3.2)$$

где  $\partial \ell_0 = \partial \ell_5 \equiv 0$ ,  $\partial \ell_i$   $(i = \overline{1,4})$  - параметры кривизны и кручения траектории деформации,

$$\partial \ell_{i-1}^2 = \frac{d^i \boldsymbol{\vartheta}}{ds^i} \cdot \frac{d^i \boldsymbol{\vartheta}}{ds^i}, \ i = \overline{2,5}.$$
(3.3)

Наиболее важной в конкретных приложениях является кривизна траектории  $\partial \ell_1 = \partial \ell$ . С использованием (3.2) можно показать, что

$$\partial \ell_i^2 = -\partial \ell_{i-1}^2 + \frac{d\mathbf{p}^i}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{p}^i}{ds}, \ i = \overline{1,4}.$$
(3.4)

В частных случаях при размерности пространства D, меньшей 5, формула используется только до i = D - 1.

Параметры кривизны и кручения  $\mathcal{H}_i$   $(i = \overline{1,4})$  как функции длины дуги траектории *s* полностью определяют внутреннюю геометрию траектории деформации (т.е. с точностью до ортогональных преобразований траектории в  $\mathcal{P}^{(5)}$ ). При рассмотрении траекторий с изломами в число внутренних параметров вводятся также координаты  $s_r$  и углы излома  $\Delta \theta_r^i$  (углы определяются между касательными при  $s_{r-0}$  и  $s_{r+0}$ ).

С использованием репера Френе вектор напряжений представляется в виде:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_i \, \boldsymbol{p}^i \,, \tag{3.5}$$

или

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cos \vartheta_i \boldsymbol{p}^i, \tag{3.6}$$

где  $\Sigma_i$  (или  $\Sigma$ ,  $\vartheta_i$ ) являются функционалами кривизн  $\mathcal{A}_i$  и указанных выше параметров, характеризующих воздействия немеханической природы и среднее давление. Напомним, что согласно принципу запаздывания (памяти) векторных свойств, ориентация вектора  $\Sigma$  в репере Френе (т.е. углы  $\vartheta_i$ ) определяется не всей предысторией деформирования, а лишь предшествующим участком траектории деформации длиной h, называемой следом запаздывания.

Вводя обозначение  $\hat{\mathscr{A}} = \max_{i=1,4} |\mathscr{A}_i|$ , можно следующим образом классифицировать траектории деформации: а)  $\hat{\mathscr{A}} \approx 0$  - траектории простого нагружения; б)  $\hat{\mathscr{A}} < h^{-1}$  - траектории малой кривизны; в)  $\hat{\mathscr{A}} \le h^{-1}$  - траектории средней кривизны; г)  $\hat{\mathscr{A}} > h^{-1}$  - траектории большой кривизны; д)  $\hat{\mathscr{A}} >> h^{-1}$  - траектории с изломами.

Аналогичные определения и соотношения можно привести для процесса нагружения (в пространстве  $\Sigma^{(5)}$ ).

В основу теории УПП положены: постулат изотропии в общей форме (или постулат макроскопической определимости, или принцип детерминизма), постулат пластичности А.А. Ильюшина, гипотеза макрофизической определимости, принцип запаздывания. Формулировки отдельных определяющих соотношений в рамках теории 44

УПП большое значение имеют частный постулат изотропии, гипотеза локальной определенности, гипотеза компланарности. Первая группа постулатов и гипотез рассматривается в общем курсе МСС, здесь остановимся лишь на положениях второй группы.

Для начально изотропных тел достаточно хорошо экспериментально обоснован постулат изотропии в частной форме:

Образ процесса нагружения инвариантен относительно ортогональных преобразований в совмещенном пространстве напряжений - деформаций.

Данный постулат позволяет существенно сократить объем экспериментальных исследований для установления определяющих соотношений.

Для дальнейшей конкретизации функциональной зависимости векторных свойств весьма конструктивной следует признать предложенную В.С. Ленским гипотезу локальной определенности: скорость изменения углов ориентации  $\mathcal{G}_i$  определяется текущими значениями углов  $\mathcal{G}_i$ , кривизн  $\mathcal{H}_i$  и длины дуги s:

$$\frac{d\vartheta_i}{ds} = \varphi_i \left( \vartheta_k , \mathcal{H}_k , s \right), \tag{3.7}$$

#### где $\varphi_i$ - универсальные функции материала.

В некоторых случаях в число аргументов функций  $\varphi_i$  включают модуль вектора напряжений  $\Sigma$  (или  $\sigma_u$ ).

В некоторых работах встречается несколько отличающаяся формулировка гипотезы локальной определенности: приращение  $d\Sigma$  вектора напряжений  $\Sigma$  определяется его модулем  $\sigma_u$  и ориентацией в текущем репере Френе, внутренней геометрией в рассматриваемой точке траектории деформации, т.е.

$$\frac{d\Sigma}{ds} = \psi_i (\sigma_u, \vartheta_k, \mathcal{A}_k, s) \boldsymbol{p}^i.$$
(3.7)

Заметим, что длина вектора напряжений для упрочняющихся материалов с учетом известных экспериментальных данных может считаться универсальной функцией длины дуги траектории при активной деформации:  $\sigma_u = \Sigma = \Phi(s)$  (за исключением сложных нагружений).

Одним из наиболее эффективных предположений, позволяющим существенно упростить построение ОС теории пластичности, является гипотеза компланарности  $\Sigma$ ,  $d\Sigma$ ,  $d\Sigma$ ,  $d\sigma$ , которая может быть записана в виде:

$$d\Sigma = Nd\vartheta - M \frac{\Sigma}{|\Sigma|} ds, \qquad (3.8)$$

где *N* и *M* - функционалы процесса деформирования. В дифференциальной форме последнее соотношение принимает вид:

$$\frac{d\Sigma}{ds} = N\boldsymbol{p}^{1} - M \frac{\Sigma}{|\Sigma|}.$$
(3.8')

Учитывая, что  $\frac{d}{ds} \Sigma = \frac{d}{ds} (\Sigma \cdot \Sigma)^{\frac{1}{2}} = \frac{d\Sigma}{ds} \cdot \frac{\Sigma}{|\Sigma|}$ , из соотношения (3.8')

следует:

$$M = N\cos\theta_1 - \frac{d}{ds}\Sigma.$$

Тогда (3.8) (или (3.8')) можно записать в виде:

$$\frac{d\Sigma}{ds} = N\mathbf{p}^{1} + \left(\frac{d|\Sigma|}{ds} - N\cos\vartheta_{1}\right)\frac{\Sigma}{|\Sigma|}.$$
(3.9)

Учитывая, что  $\cos \vartheta_1 = p^1 \cdot \frac{\Sigma}{|\Sigma|}$ , и вводя обозначение  $P = \frac{d|\Sigma|/ds}{\cos \vartheta_1}$ , последнее соотношение преобразуем к виду:

$$d\boldsymbol{\Sigma} = Nd\boldsymbol{\vartheta} - (P - N) \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot d\boldsymbol{\vartheta}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^2} \boldsymbol{\Sigma}.$$
(3.10)

Соотношения (3.8) - (3.10) лежат в основе многих частных теорий пластичности, входящих в теорию УПП.

#### Частные теории.

Наиболее простой является теория малых упругопластических деформаций (А.А. Ильюшин), справедливая, строго говоря, только для случая простого нагружения. Векторы напряжений и деформаций в этом случае направлены вдоль одного луча в совмещенных пространствах  $\mathcal{P}^{(5)}$  и  $\mathcal{L}^{(5)}$ , так что при активной деформации

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\boldsymbol{\Phi}(s)}{|\boldsymbol{\mathfrak{I}}|} \boldsymbol{\mathfrak{I}},\tag{3.11}$$

Ф(s) определяется в экспериментах на простое (одноосное) нагружение, при разгрузке используется закон Гука в приращениях , с возможным учетом наведенной анизотропии.

Предложенная А.А. Ильюшиным теория пластичности для траекторий малой кривизны основана на известных экспериментальных данных, согласно которым  $p^1 = \frac{\Sigma}{|\Sigma|}$ , откуда имеем

$$d\boldsymbol{\vartheta} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{|\boldsymbol{\Sigma}|} d\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot d\boldsymbol{\vartheta}}{\left(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{s})\right)^2} \boldsymbol{\Sigma}$$
(3.12)

Для процессов деформирования по траекториям средней кривизны В.И. Малым в 60-70-х годах были получены соотношения теории средней кривизны, стандартная форма которых имеет вид:

$$\boldsymbol{\Sigma} = |\boldsymbol{\Sigma}| (\boldsymbol{p}^{1} \cos \theta_{1} + \boldsymbol{p}^{2} \cos \theta_{2}),$$
  

$$|\boldsymbol{\Sigma}| = \boldsymbol{\Phi}(s), \ \theta_{1} = \int_{0}^{s} \boldsymbol{B}(s,\xi) \partial \ell_{1}(\xi) d\xi,$$
  

$$\cos^{2} \theta_{1} + \cos^{2} \theta_{2} = 1,$$
(3.13)

где  $B(s,\xi)$  - ядро, определяемое экспериментально.

В последние годы предложены различные модификации теории средней кривизны, связанные главным образом с переходом к дифференциальной форме определяющих соотношений с введением дополнительных упрощающих гипотез. В частности, В.И. Малым в предположениях, угол  $\mathcal{G}_{1}$ не превышает что значения  $(\sin \theta_1 \approx \theta_1, \cos \theta_1 \approx 1), \ \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \pi/2, \ \text{т.e.}$  вектор напряжений лежит в плоскости, получены следующие определяющие соприкасающейся соотношения:

$$d\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\boldsymbol{\Phi}(s)}{\boldsymbol{\lambda}(s)} d\boldsymbol{\vartheta} + \left[\frac{d\boldsymbol{\Phi}}{ds} - \frac{\boldsymbol{\Phi}(s)}{\boldsymbol{\lambda}(s)}\right] \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot d\boldsymbol{\vartheta}}{\boldsymbol{\Phi}^2} \boldsymbol{\Sigma}, \qquad (3.14)$$

где  $\lambda(s)$  - материальная функция, определяемая экспериментально. Им получено эволюционное уравнение для угла  $\mathcal{G}_1$ :

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} = \partial \ell_1 - \frac{\vartheta_1}{\lambda(s)}.$$
(3.15)

Сопоставляя правые части (3.10) и (3.14), нетрудно видеть, что

$$N = \frac{\Phi(s)}{\lambda(s)}, \ P = \frac{d\Phi}{ds}.$$
(3.16)

С.В. Ермаковым предложено обобщение (3.14), содержащее две новые материальные функции  $a_1(s)$ ,  $b_1(s)$ :

$$\frac{d\Sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds}\frac{\Sigma}{\Phi} + \frac{\Phi(s)}{\lambda(s)} \left[ \left( b_2 + b_1 \cos \theta_1 \frac{|\Sigma|}{\Phi} \right) \frac{d\vartheta}{ds} - \frac{a_2 + a_1 \cos \theta_1}{\Phi} \Sigma \right], \quad (3.17)$$
$$a_2 = 1 - a_1, \ b_2 = 1 - b_1.$$

В варианте теории средней кривизны, разработанным Дао Зуй Биком, полагается  $\cos \theta_1 = 1 - \frac{\theta_1^2}{2}$ . Определяющее соотношение имеет вид:

$$\frac{d\boldsymbol{\Sigma}}{ds} = k(s)|\boldsymbol{\Sigma}|\frac{d\boldsymbol{\vartheta}}{ds} + \left[\frac{d\boldsymbol{\Phi}}{ds} - k(s)|\boldsymbol{\Sigma}|(s)\right]\frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{p}^{1}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{2}}\boldsymbol{\Sigma}, \qquad (3.18)$$

где для материальной функции k(s) предлагается следующее аппроксимирующее выражение:  $k(s) = a + \frac{b}{s}$ , *a* и *b* - материальные постоянные. Сопоставление правых частей (3.10) и (3.18) позволяет записать:

$$N = k(s)|\boldsymbol{\Sigma}|(s), \ P = \frac{d|\boldsymbol{\Sigma}|/ds}{\cos \theta_1} = \frac{d\Phi}{ds}.$$
(3.19)

Из (3.19<sub>2</sub>) следует:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\Sigma}|(s) &= \boldsymbol{\Phi}(s) - \int_0^s \frac{d\boldsymbol{\Phi}}{ds}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^2(\boldsymbol{\xi})}{2} d\boldsymbol{\xi}. \\ |\boldsymbol{\Sigma}|(0) &= \boldsymbol{\Phi}(0). \end{aligned}$$
(3.20)

Согласно полученным оценкам с использованием формулы (3.20), максимальное отклонение  $|\Sigma|$  от  $\Phi(s)$  составляет 7÷8%. Отметим, что здесь приведены определяющие соотношения только для участков активного пластического деформирования, разгрузка описывается обычно с помощью закона Гука.

Одной из широко используемых частных теорий является теория пластичности для траекторий в виде двузвенных ломаных (А.А. Ильюшин, В.С. Ленский, Р.А. Васин). Подобные процессы имеют место при потере устойчивости конструкций в упругопластической области, потере устойчивости процесса упругопластического деформирования. Существует несколько вариантов записи данных соотношений. Здесь приведены две наиболее распространенные формы.

На первом участке деформирования справедливы соотношения теории малых упругопластических деформаций. В точке излома, обозначаемой индексом «0», полагается, что вектор напряжений направлен вдоль 1-го участка траектории деформации, угол излома

траектории обозначим через  $\mathcal{G}_0$ , вектор напряжений -  $\Sigma_0$ , длина дуги траектории в точке излома  $\Delta s = s - s_0$ . Тогда в конечных приращениях определяющее соотношение может быть записано в виде (Р.А. Васин):

$$\Delta \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}_{0} = N_{1} \Delta \boldsymbol{\vartheta} + (P_{1} - N_{1}) \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{0} \cdot \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\vartheta}}{\left|\boldsymbol{\Sigma}_{0}\right|^{2}} \boldsymbol{\Sigma}_{0}, \qquad (3.21)$$

где  $\Delta \boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta}_0 = \boldsymbol{p}_1 \Delta \boldsymbol{s}$ ,

$$N_{1} = \frac{|\boldsymbol{\Sigma}|\sin(\boldsymbol{\vartheta}_{0} - \boldsymbol{\vartheta}_{1})}{\boldsymbol{\Delta}s\sin\boldsymbol{\vartheta}_{0}}, P_{1} = \frac{|\boldsymbol{\Sigma}|\cos(\boldsymbol{\vartheta}_{0} - \boldsymbol{\vartheta}_{1})}{\boldsymbol{\Delta}s\cos\boldsymbol{\vartheta}_{0}}$$

В некоторых случаях удобно использовать определяющие соотношения в терминах конечных значений напряжений и деформаций (А.А. Ильюшин, В.С. Ленский):

$$\boldsymbol{\Sigma} = |\boldsymbol{\Sigma}| (\cos \theta_1 \boldsymbol{p}_1 + \sin \theta_1 \boldsymbol{p}_2) = |\boldsymbol{\Sigma}| \left\{ \frac{\sin(\theta_0 - \theta_1)}{\sin \theta_0} \boldsymbol{p}_1 + \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_0} \boldsymbol{y}_0 \right\}, \quad (3.22)$$

где  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = \cos \vartheta_0 \boldsymbol{p}_1 + \sin \vartheta_0 \boldsymbol{p}_2.$ 

Отметим, что из многочисленных экспериментов на двузвенных траекториях следует, что материальные функции удовлетворяют принципу запаздывания ( $\mathcal{G}_1 \rightarrow 0$  при  $\Delta s \rightarrow \infty$  или  $\Sigma_2 \rightarrow 0$  при  $\Delta s \rightarrow \infty$ ), с достаточной точностью - гипотезе локальной определенности. Отмечается, что сразу за точкой излома наблюдается уменьшение модуля вектора напряжений (так называемый «нырок»), после чего происходит постепенное нарастание  $|\boldsymbol{\Sigma}|$ .

Из экспериментов также получено, что при  $\mathcal{G}_0 \leq 90^\circ$  функция  $\mathcal{G} = \frac{\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_0}$  практически не зависит от  $\mathcal{G}_0$ ,что позволяет сократить число потребных экспериментов.

В заключение отметим, что А.А. Ильюшиным была предложена так называемая истокообразная форма определяющих соотношений:

$$\boldsymbol{\Sigma} = |\boldsymbol{\Sigma}| \int_0^s A(s, \boldsymbol{\xi}, \{\alpha\}) \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \qquad (3.23)$$

где  $\{\alpha\}$  означает набор параметров  $\mathcal{A}_n(s)$ ,  $\mathcal{A}_n(\xi)$ , характеризующих сложность траектории предшествующей деформации. Указанные соотношения до настоящего времени не получили должного применения и развития, хотя представляются перспективными.

Заметим, что приведенные теории пластичности имеют ярко выраженный феноменологический макроскопический характер.

## 4. Некоторые модификации теории пластического течения

Изучаемая в курсе МСС классическая теория пластического течения (ТПТ), базирующаяся на понятии поверхности текучести и трех основных законах упрочнения (изотропного, кинематического позволяет описывать И комбинированного типов), процессы деформирования с достаточной для прикладных задач МДТТ нагружениях, точностью лишь при близких К простым (деформирование траекториям малой кривизны). Данное ПО обстоятельство, имеющее широкое экспериментальное подтверждение, стимулировало исследования В теории пластического течения, имеющие теории, целью создание позволяющей описывать процессы сложного нагружения без отказа от основных положений теории течения.

Созданные И создаваемые рамках ТПТ теории В сконцентрированы построении различных на законов упрочнения. При построении законов упрочнения разделяют одноповерхностные и многоповерхностные теории, в рамках каждой из которых формулируются законы трансляции (переноса без изменения формы) эволюции формы поверхности И (поверхностей) течения. Собственно определяющие соотношения ТПТ в дальнейшем получают, как правило, с использованием принципа градиентальности, согласно которому бесконечно малое приращение тензора (девиатора) пластических деформаций пропорционально градиенту (в пространстве девиаторов напряжений) функции, описывающей поверхность текучести. Иными словами, вектор бесконечно малых приращений пластической деформации направлен по нормали к соответствующей поверхности текучести в текущей точке процесса нагружения.

При построении модификаций ТПТ обычно сохраняются и другие гипотезы классической ТПТ. В частности, принимается линейная связь первых инвариантов тензоров напряжений и деформаций (средних напряжений и деформаций). Пластические деформации обычно полагаются изохорическими,  $I_1(\varepsilon^p) = 0$ . В рамках геометрически линейных теорий принимается гипотеза об аддитивном разложении тензора (девиатора) полных деформаций на упругую и пластическую составляющие:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{e} + \boldsymbol{\varepsilon}^{p}, \quad d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{e} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{p}, \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{e} + \boldsymbol{e}^{p}, \quad d\boldsymbol{e} = d\boldsymbol{e}^{e} + d\boldsymbol{e}^{p}.$$
(4.1)

Для составляющих тензора деформаций упругих В большинстве теорий полагается справедливым закон Гука. Таким образом, в дальнейшем можно сосредоточить внимание на рассмотрении соотношений девиаторов напряжений ДЛЯ И пластических деформаций.

Рассмотрим одноповерхностные теории течения. Для определенности будем применять критерий текучести Мизеса. С использованием принципа градиентальности основное соотношение теории течения для комбинированного закона упрочнения может быть записано в виде:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{\mathrm{R}(\boldsymbol{\lambda})} (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\rho}), \qquad (4.2)$$

где  $\lambda$  – параметр, характеризующий длину дуги деформации,  $d\lambda = (de^{p}:de^{p})^{1/2}; \rho$  – тензор (девиатор) так называемых *остаточных микронапряжений* (или «обратных напряжений» по зарубежной терминологии, «back stress» (англ.)); R( $\lambda$ ) – радиус поверхности текучести. Уравнение поверхности текучести имеет вид:

$$\mathbf{f} = (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\rho}) : (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\rho}) - (\mathbf{R}(\lambda))^2 = 0.$$
(4.3)

Следует отметить, что здесь в рассмотрение не включены теории с поверхностями текучести, испытывающими искажения формы, в силу их редкого использования в практике; последнее обусловлено прежде всего математическими и экспериментальными трудностями, возникающими при применении подобных теорий. В рассматриваемых теориях поверхность текучести может испытывать однородное расширение (сжатие) без искажения формы.

Основное различие в разрабатываемых модификациях ТПТ состоит в применении разных законов движения центра поверхности течения, положение которого определяется тензором  $\rho$ . В первых теориях данного типа (Ишлинский А.Ю. (1954), Кадашевич Ю.И. и Новожилов В.В. (1957)) предложены достаточно простые эволюционные уравнения [1\*]:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\rho} = \mathrm{b}\,\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}\,,\tag{4.4}$$

где b – материальная функция (или константа), определяемая

экспериментально.

Две различные формы уравнения для определения  $\rho$  были предложены Г. Бакхаузом в 1968 г. и 1972 г., имеющие соответственно вид:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{b}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{c}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}},\tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \int_{0}^{\lambda} b(\lambda') L(\lambda - \lambda') \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\lambda'} \mathrm{d}\lambda', \qquad (4.6)$$

где b, c, L – материальные функции. Нетрудно видеть, что во второе из предложенных уравнений Г. Бакхауза явным образом введена память о предшествующей истории деформации; появляется дополнительная возможность учета памяти за счет введения ядра  $L(\lambda - \lambda')$ , характеризующего затухающую память.

Еще одно эволюционное уравнение было предложено в 1967 г. Ю.И. Кадашевичем:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{m}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{b}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{c}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}, \qquad (4.7)$$

b, c, m – экспериментально определяемые параметры. Подробный обзор модифицированных одноповерхностных теорий течения приведен в монографии [4].

В конце 60-х годов появилась серия работ, посвященных созданию так называемых *многоповерхностных теорий течения*. Создание их было в первую очередь обусловлено неудовлетворительным описанием одноповерхностными теориями эффекта Баушингера и процессов циклического деформирования (в особенности – при сложном нагружении). Остановимся более подробно на теории, предложенной в пионерской работе 3. Мруза [2\*].

Рассмотрим вначале случай одноосного нагружения, диаграмма которого представлена на рис. 4.1. Материал полагается начально изотропным. При растяжении материал на начальной стадии испытывает упругие деформации (участок ОF<sub>0</sub>, рис 4.1), модуль упругости равен E<sub>0</sub> = E. После достижения предела упругости, соответствующего точке F<sub>0</sub>, тангенциальный модуль кривой σ-ε начинает убывать. Аппроксимируем гладкую кривую  $\sigma - \epsilon$  с помощью n линейных сегментов с постоянными



Рис.4.1.

модулями E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub>,..., E<sub>n</sub> (заметим, что текущее значение касательного модуля определяется как dσ/dε), или с постоянными модулями  $C_1, C_2, \dots, C_n$  (C = d $\sigma$ /d $\epsilon^p, C_0 = \infty$ ). пластичности Вопрос 0 приемлемой аппроксимации решается исследователем. Для определенности будем полагать, что при аппроксимации одинаковы длины участков  $\Delta \epsilon_n^p = \epsilon_n^p - \epsilon_{n-l}^p \equiv \Delta \epsilon^p$ . Тогда на каждом участке  $F_{n-l}F_n$ модуль пластичности  $C_n = \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{\Delta \epsilon^p} = \frac{\Delta \sigma^p}{\Delta \epsilon^p}$ . На каждом k-ом участке деформирование осуществляется по единой схеме: после достижения напряжения  $\sigma_{k-1} = \sigma |_{Fk-1}$  скачком меняется модуль  $C_{k-1} \rightarrow C_k$  (т.е. сопротивление пластическому пластичности деформированию), который сохраняется вплоть до достижения напряжения  $\sigma_k$ .

Предположим теперь, что после достижения конца этапа m начинается разгрузка и нагружение в обратном направлении. На участке  $F_m R_0$  (рис. 4.1) нагружение осуществляется упругим образом, причем протяженность участка  $F_m R_0$  вдвое превышает протяженность соответствующего участка  $OF_0$  первоначального активного нагружения. Обоснование этому можно найти в физическом представлении упругопластических деформаций. Если принять, что упругие деформации обеспечиваются искажениями кристаллической решетки, то после искажения в одном

направлении кристаллическая решетка может испытать двойное искажение в обратном направлении без необратимых деформаций. На участке R<sub>0</sub>R<sub>1</sub> деформирование осуществляется неупругим образом, модуль пластичности равен модулю С<sub>1</sub> соответствующего участка F<sub>0</sub>F<sub>1</sub>, протяженность участка R<sub>0</sub>R<sub>1</sub> также вдвое превышает протяженность участка F<sub>0</sub>F<sub>1</sub> первичного нагружения. Для объяснения этого факта можно принять следующий механизм. Участку  $F_{k-1}F_k$ с модулем пластичности С<sub>к</sub> отвечает определенный набор кристаллографических плоскостей и направлений скольжения с критическим напряжением  $\tau_{k-1}$ , соответствующим  $\sigma_{k-1}$ . Вероятно, можно предположить, что повышение напряжения обусловлено упрочнением, связанным с остановкой дислокаций на различных препятствиях, прекращением действия дислокационных При обратном нагружении на источников. первой стадии деформации обусловливаются необратимые движением U аннигиляцией уже накопленных на препятствиях дислокаций; на второй стадии источники начинают действовать в обратном направлении (по существу, повторяется – с точностью до направления, - картина первичного нагружения).

Для описания данного механизма пластического деформирования можно предложить следующую структурно-(имитационную) схему. Введем механическую пластический элемент С ограничениями, характеризуемый напряжением  $\sigma^{a}$  , пластичности модулем С u предельными активации деформациями  $\pm \Delta \varepsilon^{p}$ . До достижения в элементе напряжения  $\sigma^{a}$  он ведет себя как жесткое тело; после того, как напряжение достигает напряжения σ<sup>a</sup>, элемент деформируется С сопротивлением пластической деформации С вплоть до реализации в нем пластической предельной деформации  $|\Delta \varepsilon^{\mathsf{p}}|$ , после чего элемент вновь становится жестким.





Тогда структурно-механическая модель рассматриваемой Мруза представлена теории 3. может быть в виде последовательности упругого элемента U совокупности n пластических элементов с ограничениями (рис 4.2). Следует модули упрочнения C<sub>k</sub> полагаются отметить, что если  $\sigma^a_k$ напряжения активации постоянными, то зависят om деформаций предыстории пластических всех элементов. Приведенная модель достаточно хорошо иллюстрирует одноосное нагружение.

Аналогичным образом описывается нагружение на последующих участках  $R_1R_2...R_{m-1}R_m$ . Нетрудно видеть, что нагружения в точках R<sub>m</sub> и F<sub>m</sub> равны по модулю и противоположны по знаку. Начиная с точки R<sub>т</sub> кривая обратного нагружения F<sub>m</sub>R<sub>0</sub>R<sub>1</sub>...R<sub>m</sub>R<sub>m+1</sub>... совпадает с кривой OF<sub>0</sub>'...F<sub>m-1</sub>'R<sub>m</sub>..., получаемой из кривой прямого нагружения OF<sub>0</sub>F<sub>1</sub>...F<sub>m</sub>F<sub>m+1</sub>... центральносимметричным отражением относительно точки О. Отметим, что при описании реверсивного нагружения обычно вводят повернутую на 180° систему координат  $\overline{\epsilon} - \overline{\sigma}$  с началом координат в точке начала разгрузки. Нетрудно видеть, ЧТО кривая обратного нагружения F<sub>m</sub>R<sub>0</sub>...R<sub>m</sub>... однозначно определяется кривой прямого нагружения  $OF_0...F_m...$  Действительно, если задана кривая  $\sigma = f(\varepsilon)$ прямого нагружения, то кривая реверсивного нагружения в координатах  $\overline{\epsilon} - \overline{\sigma}$  определяется соотношением:

$$\frac{1}{2}\overline{\sigma} = f(\frac{1}{2}\overline{\epsilon}). \tag{4.8}$$

Иначе говоря, эти кривые можно рассматривать как совпадающие с точностью до масштабов осей  $\varepsilon - \sigma$ . Следует отметить, что уравнение (4.8) совпадает с соотношением, полученным *Г.Мазингом* (1927 г.) при рассмотрении одноосной модели, состоящей из совокупности параллельно соединенных упругих и идеально пластических элементов с различными пределами текучести.

Если в точке  $R_m$  вновь осуществляется изменение направления нагружения, то нагружение будет осуществляться по кривой  $R_m P_0 P_1 ... P_{m-1} F_m$  и далее по кривой начального нагружения. При циклически изменяющихся между  $\sigma|_{Fm}$  и  $\sigma|_{Rm}$  напряжениях деформирование будет происходить по установившемуся циклу  $F_m R_0 R_1 ... R_m P_0 P_1 ... P_{m-1} F_m$ .

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. В

пространстве напряжений каждому значению напряжений  $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_n$  ставятся в соответствие гиперповерхности  $f_0, f_1, ..., f_n$ ; в случае условия Мизеса в пространстве девиаторов напряжений эти гиперповерхности представляют собой гиперсферы. Поверхность f<sub>0</sub> отделяет область упругого поведения материала от области пластических деформаций; в исходном положении начало координат содержится напряжений) пространстве внутри области, (в ограниченной поверхностью f<sub>0</sub>. Поверхности f<sub>1</sub>,...,f<sub>n</sub> определяют области постоянных модулей пластичности; в исходном положении поверхности f<sub>v</sub> содержат внутри себя поверхности  $f_{k-l}$  (k = 1,2,..., n; l = 1,2,...k), нигде не пересекаются и не касаются. Уравнения поверхностей имеют одинаковый вид; например, для k-й поверхности справедливо уравнение:

$$f(S - \rho^{(k)}) - (\sigma_0^{(k)})^p = 0, \qquad (4.9)$$

где  $\sigma_0^{(k)}$  – постоянная (напряжение текучести, соответствующее концу k-го участка), p – постоянная,  $\rho^{(k)}$  – девиатор остаточных микронапряжений, определяющий положение k-й гиперповерхности. Полагается, функция f(.) является ЧТО однородной степени р; следовательно, описываемые ЭТИМИ поверхности являются подобными, функциями в начальном положении – концентрическими. В дальнейшем для простоты иллюстрации будем в основном пользоваться двумерным случаем. При использовании условия Мизеса гиперповерхности f<sub>0</sub>, f<sub>1</sub>,..., f<sub>n</sub> в пространстве девиаторов S<sub>1</sub>-S<sub>2</sub> будут представлять в начальном положении семейство концентрических окружностей (рис. 4.3 а)).

Рассмотрим вначале простое циклическое нагружение вдоль оси  $\mathrm{S}_2.$ 



В рассматриваемой модели предполагается, что каждая из гиперповерхностей может перемещаться только поступательно (трансляционные перемещения) без изменения своей формы.

На начальной стадии нагружения изображающая точка в пространстве напряжений (ИТН) движется от точки О вдоль оси S<sub>2</sub> до достижения предела текучести в точке F<sub>0</sub>, деформирование на участке  $OF_0$  осуществляется упругим образом,  $C_0 = \infty$ . При продолжающемся нагружении в положительном направлении оси S<sub>2</sub> ИТН «захватывает» поверхность f<sub>0</sub> и движется вместе с ней до достижении точки F<sub>1</sub>; пластическое деформирование на участке F<sub>0</sub>F<sub>1</sub> осуществляется с модулем пластичности С<sub>1</sub>. До достижения точки F<sub>1</sub> все поверхности f<sub>1</sub>, f<sub>2</sub>,..., f<sub>n</sub> остаются неподвижными. При достижении ИТН точки F<sub>1</sub> и продолжающемся лучевом нагружении уже две поверхности,  $f_0$  и  $f_1$ , движутся вместе с ИТН поступательно прямолинейно вплоть до точки F2. Деформирование на участке F1F2 осуществляется с пластическим модулем C2, окружности f2, f3,..., fn остаются неподвижными. Аналогичным образом можно описать последующее активное лучевое нагружение; на рис. 4.36) изображено положение поверхностей, соответствующее достижению ИТН точки F<sub>3</sub>.

Пусть начиная с этого момента осуществляется процесс разгрузки и нагружения в обратном направлении. При движении ИТН от точки  $F_3$  до точки  $R_0$  (рис. 4.3 б)) материал деформируется соответствует начало точке пластического упруго, R деформирования в обратном направлении. Начиная с точки R<sub>0</sub> ИТН движется в отрицательном направлении оси S<sub>2</sub> вместе с поверхностью f<sub>0</sub> вплоть до касания окружности f<sub>1</sub> в точке R<sub>1</sub>. На этом этапе деформирования все остальные поверхности  $f_1, f_2, ..., f_n$ сохраняют положение, занимаемое ими в конце предыдущего участка активного нагружения. После достижения ИТН положения R<sub>1</sub> дальнейшее деформирование до положения R<sub>2</sub> сопровождается совместным перемещением поверхностей f<sub>0</sub>, f<sub>1</sub> при неподвижных поверхностях f<sub>2</sub>, f<sub>3</sub>,..., f<sub>n</sub>; деформирование на участке  $R_1R_2$ осуществляется с пластическим модулем С2. На рис. 4.3в) изображено положение поверхностей в момент достижения ИТН положения R<sub>2</sub>.

При формулировке определяющего соотношения полагается

справедливым принцип градиентальности, причем при определении градиента используется последняя из поверхностей нагружения  $f_k$ , вовлеченная в трансляцию в пространстве напряжений вместе с ИТН, и соответствующий ей пластический модуль  $C_{k+1}$ .

Тогда получаем (опуская индекс):

$$d\boldsymbol{e}^{p} = \frac{1}{C}\boldsymbol{n}_{f}(d\boldsymbol{S}:\boldsymbol{n}_{f}) = \frac{1}{C}d\sigma_{f}\boldsymbol{n}_{f}$$
(4.10)

где  $\boldsymbol{n}_{\rm f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{e}^{\rm p}}{\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{e}^{\rm p}}\right|}$  – направляющий (единичный по модулю) тензор

внешней нормали к f;  $\left|\frac{\partial f}{\partial e^{p}}\right| = \left(\frac{\partial f}{\partial e^{p}}; \frac{\partial f}{\partial e^{p}}\right)^{\frac{1}{2}}$  - модуль тензора  $\frac{\partial f}{\partial e^{p}}; d\sigma_{f} = dS: \mathbf{n}_{f}$  – проекция бесконечно малого приращения девиатора напряжений на единичную нормаль к активной поверхности нагружения f; C – модуль упрочнения, являющийся обобщением тангенциального модуля, используемого в случае одноосного нагружения. Отметим, что в силу пропорциональности тензоров  $\mathbf{n}_{f}$  и  $de^{p}$  направляющий тензор можно определить как  $\mathbf{n}_{f} = \frac{de^{p}}{de^{p}}$ . Тогда, как нетрудно видеть:

$$C = \frac{d\sigma_{f}}{d\varepsilon^{p}} = \frac{d\boldsymbol{S}:\boldsymbol{n}_{f}}{d\varepsilon^{p}} = \frac{d\boldsymbol{S}:d\boldsymbol{e}^{p}}{(d\varepsilon^{p})^{2}} = \frac{d\boldsymbol{S}:d\boldsymbol{e}^{p}}{(d\boldsymbol{e}^{p}:d\boldsymbol{e}^{p})}.$$
(4.11)

Обратимся теперь к описанию нагружения, отличающегося от пропорционального. Как и ранее, полагается, что поверхности  $f_i$ , i = 0,...,n, могут перемещаться только поступательно, могут только касаться друг друга, последовательно вовлекая в движение поверхности с большими номерами. На любом участке активного пластического деформирования все предшествующие поверхности нагружения, «захваченные» при движении ИТН, касаются друг друга в точке текущего положения ИТН.

Рассмотрим случай, когда после нагружения до точки  $F_3$  (см. рис. 4.36)) произошла частичная разгрузка до положения  $R_0'$ , а затем осуществляется нагружение по лучу  $R_0'R_0''R_1'R_2'R_3'R_4'$ , параллельному оси  $S_1$  (рис. 4.4). После достижения ИТН положения  $R_0''$  и продолжающегося нагружения вдоль  $R_0''R_4'$  поверхность  $f_0$ 

не может перемещаться ни вдоль единичной нормали **n**<sub>0</sub> в точке R<sub>0</sub>", ни вдоль луча R<sub>0</sub>"R<sub>4</sub>', поскольку в этом случае она будет пересекать другие поверхности, что недопустимо. Конечная трансляция, приводящая к касанию окружностей f<sub>0</sub> и f<sub>1</sub> в точке f<sub>0</sub>, может быть осуществлена расположенной R<sub>0</sub>'', на перемещением  $f_0$  на вектор  $\overline{R_0^{"}A_1}$ , где  $A_1$ поступательным определяет положение внешней нормали  $n_1^0$  на поверхности  $f_1$ , совпадающей с **n**<sub>0</sub>. Однако при этом будет нарушено другое условие - точка А<sub>1</sub>не является местом расположения ИТН, поскольку траектория нагружения задана и определяется лучом  $R_0'R_4'$ . В используется следующая схема: мгновенное связи с ЭТИМ перемещение поверхности  $f_0$  осуществляется вдоль  $\overline{R_0"A_1}$ , однако ИТН остается на поверхности f<sub>0</sub>. Тогда после бесконечно малого смещения поверхности  $f_{_0}$  вдоль  $\overline{R_{_0}"A_{_1}}$  определяется новое положение  $R_0''$  на поверхности  $f_0$ ,



одновременно принадлежащее лучу  $R_0'R_4'$ . Из рассмотрения рис.4.4 нетрудно видеть, что при этом угол между  $n_0$  и осью  $OS_2$ уменьшится. После этого определяется новое положение точки  $A_1$ , причем в силу вышесказанного угол  $F_3O_1A_1$  уменьшается на то же значение, на которое уменьшится угол  $F_3O_0R_0''$ . В ходе бесконечно малых шагов происходит постепенное сближение положения  $R_0''$ ИТН на  $f_0$  и соответствующей точки  $A_1$  на  $f_1$ . При этом точка  $R_0''$ все время будет оставаться на луче  $R_0'R_4'$ , в силу чего положение точки  $A_1$  на  $f_1$  будет приближаться к указанному лучу. В конечном итоге при переходе ИТН в положение  $R_1'$  поверхности  $f_0$  и  $f_1$  будут касаться друг друга в этой точке.

Перейдем к математическому описанию движения поверхностей нагружения. Для ЭТОГО достаточно рассмотреть процесс перемещения одной из поверхностей (например, f<sub>1</sub>) до касания с поверхностью следующего уровня (f<sub>1+1</sub>, Рис.4.5). Действительно, все поверхности c последующими номерами остаются  $(f_{l+1}, f_{l+2}, ..., f_n).$ Описание неподвижными движения ранее «захваченных» поверхностей (f<sub>0</sub>,...,f<sub>1-1</sub>) может быть осуществлено аналогично рассматриваемому случаю (напомним, что все они должны касаться друг друга и поверхности f<sub>1</sub> в месте текущего положения ИТН). Ниже будет показано, что положение  $f_{l-1},...,f_0$ поверхностей может быть установлено простыми соотношениями. При этом отсутствует необходимость определения каждый нагружения, ИХ положения В момент достаточно устанавливать их в момент начала разгрузки; при активном нагружении в соотношениях используются характеристики только последней из вовлеченных в движение поверхностей (в данном случае -  $f_i$ ).

Рассматриваются две подобные поверхности нагружения  $f_l$  и  $f_{l+1}$ , положение которых определяется центрами  $O_l$  и  $O_{l+1}$  соответственно, устанавливаемые, в свою очередь, девиаторами остаточных микронапряжений  $\rho_l$  и  $\rho_{l+1}$  (рис. 4.5). Поверхности нагружения описываются уравнениями:

$$f(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\rho}_l) - (\sigma_0^{(l)})^p = 0, \quad f(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\rho}_{l+1}) - (\sigma_0^{(l+1)})^p = 0, \quad (4.12)$$

где f – однородная функция порядка p,  $\sigma_0^l, \sigma_0^{l+1}$  – постоянные.



Рис.4.5.

Пусть изображающая точка лежит на поверхности  $f_l$  в положении A, нагружение осуществляется вдоль луча AC. Тогда мгновенное перемещение поверхности  $f_l$  осуществляется вдоль AB, где B – точка на поверхности  $f_{l+1}$ , имеющая одинаковое направление внешней нормали с внешней нормалью в точке A,  $\boldsymbol{n}_{f_{l+1}}\Big|_{B} = \boldsymbol{n}_{f_l}\Big|_{A}$ . Положение точки B для подобных поверхностей определяется пересечением с поверхностью  $f_{l+1}$  прямой  $O_{l+1}$ B, параллельной  $O_l$ A. Обозначим девиаторы напряжений в точках A и B соответственно через  $\boldsymbol{S}^{(l)}$  и  $\boldsymbol{S}^{(l+1)}$ . Тогда, вводя обозначения  $\boldsymbol{t}^{(l+1)} = \boldsymbol{S}^{(l+1)} - \boldsymbol{\rho}_{l+1}$ ,  $\boldsymbol{t}^{(l)} = \boldsymbol{S}^{(l)} - \boldsymbol{\rho}_l$ , в силу вышесказанного получаем:  $\boldsymbol{t}^{(l+1)} = \mathbf{k} \, \boldsymbol{t}^{(l)}_{lj}$ ,  $k \in \mathbf{R}_+$ , так что  $\forall i, j \ t_{ij}^{(l+1)} = k \ t_{ij}^{(l)}$ ,  $k = \frac{t_{ij}^{(l+1)}}{t_{ij}^{(l)}}$ ,  $t_{ij}^{(l)} \neq 0$ . Вследствие однородности функции f (порядка p) из (4.12) получаем:

$$f(t^{(l+1)})/f(t^{(l)}) = \left( \frac{\sigma_0^{(l+1)}}{\sigma_0^{(l)}} \right)^p, \Rightarrow k^p = \left( \frac{\sigma_0^{(l+1)}}{\sigma_0^{(l)}} \right)^p, \text{ откуда следует:}$$
$$S^{(l+1)} - \rho_{l+1} = \frac{\sigma_0^{(l+1)}}{\sigma_0^{(l)}} \left( S^{(l)} - \rho_l \right).$$
(4.13)

Перемещение поверхности  $f_l$  в текущий момент времени на бесконечно малое расстояние осуществляется вдоль тензора  $S^{(l+1)} - S^{(l)}$ . Как следует из (4.13):

$$S^{(l+1)} - S^{(l)} = \rho_{l+1} + \frac{\sigma_0^{(l+1)}}{\sigma_0^{(l)}} (S^{(l)} - \rho_l) - S^{(l)} = \frac{1}{\sigma_0^{(l)}} [(\sigma_0^{(l+1)} - \sigma_0^{(l)}) S^{(l)} + (\rho_{l+1} \sigma_0^{(l)} - \rho_l \sigma_0^{(l+1)})].$$

Тогда  $d\rho^{(l)}$  можно определить следующим образом:

$$d\boldsymbol{\rho}^{(l)} = \frac{d\mu}{\sigma_0^{(l)}} \Big[ \Big( \sigma_0^{(l+1)} - \sigma_0^{(l)} \Big) \boldsymbol{S}^{(l)} + \Big( \boldsymbol{\rho}_{l+1} \sigma_0^{(l)} - \boldsymbol{\rho}_l \sigma_0^{(l+1)} \Big) \Big], \quad (4.14)$$

где dµ – скалярный множитель, характеризующий величину смещения. В частности, когда центры поверхностей  $f_l$  и  $f_{l+1}$  совпадают,  $\rho_l = \rho_{l+1}$ , из (4.14) следует:

$$d\boldsymbol{\rho}^{(l)} = \frac{d\mu}{\sigma_0^{(l)}} \Big[ \Big( \sigma_0^{(l+1)} - \sigma_0^{(l)} \Big) \Big( \boldsymbol{S}^{(l)} - \boldsymbol{\rho}_l \Big) \Big],$$
(4.15)

т.е. в этом случае мгновенная трансляция осуществляется вдоль O<sub>1</sub>A. Отметим, что в этом частном случае закон трансляции (4.15) совпадает с предложенным Г. Циглером (1959г.) законом для определения остаточных микронапряжений при произвольном нагружении с использованием одноповерхностной теории пластического течения:

 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho} = \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\rho}).$ 

*Т.е. в этом законе полагается, что смещение поверхности текучести осуществляется вдоль направления, связывающего центр поверхности текучести и ИТН.* 

Как уже отмечалось ранее, движение ИТН задано условиями нагружения; для рассматриваемого случая, например, ИТН должна находиться на прямой AC, не покидая при этом поверхность нагружения  $f_i$ . Иначе говоря,  $\forall t$  ИТН участвует одновременно в

двух мгновенных движениях – определяемом собственно нагружением (d**S**) и движением поверхности  $f_l$  (d $\rho^{(l)}$ ). Рассматривая последнее как переносное движение, первое – как абсолютное, для сохранения положения ИТН на поверхности  $f_l$ следует потребовать, чтобы мгновенное относительное движение (d**S** – d $\rho^{(l)}$ ) осуществлялось по касательной к поверхности  $f_l$ . Данное условие можно записать в виде:

$$\left(\mathrm{d}\boldsymbol{S} - \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^{(l)}\right): \frac{\partial \mathbf{f}_l}{\partial \boldsymbol{S}} = 0.$$
(4.16)

Соотношение (4.16) используется для определения скалярного множителя dµ. Для этого запишем вначале (4.14) в виде:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^{(l)} = \mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \Big( \boldsymbol{S}^{(l+1)} - \boldsymbol{S}^{(l)} \Big). \tag{4.17}$$

С учетом (4.17) из (4.16) получаем:

$$d\mu = \frac{\frac{\partial \mathbf{f}_{l}}{\partial \mathbf{S}} : d\mathbf{S}}{\frac{\partial \mathbf{f}_{l}}{\partial \mathbf{S}} : (\mathbf{S}^{(l+1)} - \mathbf{S}^{(l)})} = \frac{d\sigma_{\mathbf{f}_{l}}}{\mathbf{n}_{\mathbf{f}_{l}} : (\mathbf{S}^{(l+1)} - \mathbf{S}^{(l)})}, \qquad (4.18)$$

где  $d\sigma_{f_l} = \boldsymbol{n}_{f_l} : d\boldsymbol{S}$ ,  $\boldsymbol{n}_{f_l} = \frac{\partial f_l / \partial \boldsymbol{S}}{\left| \partial f_l / \partial \boldsymbol{S} \right|}$  - направляющий тензор внешней нормали к  $f_l$  в точке  $\boldsymbol{S}^{(l)}$ .

Все поверхности  $f_0, f_1, ..., f_{l-1}$  в процессе активного нагружения должны оставаться в контакте с поверхностью  $f_l$ , причем общая точка контакта совпадает с текущим положением ИТН. Очевидно, что данное обстоятельство обусловливает смещение поверхностей  $f_0, f_1, ..., f_{l-1}$  относительно  $f_l$ .

Отметим. что положение внутренних поверхностей  $f_0, f_1, \dots, f_{I-1}$ относительно f<sub>1</sub> при активном нагружении определяется в каждый момент простыми процесса соотношениями. Действительно, в силу подобия поверхностей нагружения и в силу их выпуклости, нетрудно заметить, что центры поверхностей  $f_0, f_1, ..., f_{l-1}$  расположены на прямой  $O_l A$ . Данный факт следует из того, что для выпуклой и гладкой

поверхности ориентация внешней нормали полностью и однозначно определяется положением точки на поверхности, т.е. тензором  $S^{(k)} - \rho_{k}$  для любой поверхности $f_{k}$ . Поскольку в точке касания внешние нормали касающихся поверхностей f<sub>k</sub> и f<sub>m</sub> должны совпадать, а сами подобные поверхности движутся относительно друг друга поступательно, то тензоры  $(S^{(k)} - \rho_k), (S^{(m)} - \rho_m)$ должны быть пропорциональны. В векторном пространстве напряжений это означает, что соответствующие векторы  $(\boldsymbol{\Sigma}^{(\tilde{k})} - \boldsymbol{P}_{k}), (\boldsymbol{\Sigma}^{(m)} - \boldsymbol{P}_{m})$  должны быть коллинеарны. В случае, если поверхности  $f_k$  и  $f_m$  имеют общую точку касания, т.е.  $\boldsymbol{\Sigma}^{(k)} = \boldsymbol{\Sigma}^{(m)}$ , это означает, что векторы  $\left( \boldsymbol{\varSigma}^{(k)} - \boldsymbol{P}_{k} \right) ~ u ~ \left( \boldsymbol{\varSigma}^{(m)} - \boldsymbol{P}_{m} \right)$  направлены вдоль одной прямой, что и требовалось показать. Заметим, что в строго выпуклых поверхностей (например, случае не для Треска-Сен-Венана) данное свойство поверхностей также сохраняется, что следует из процедуры построения конфигурации семейства поверхностей нагружения.

Из приведенного свойства следует, что положение центра  $O_{l-1}$  поверхности  $f_{l-1}$ , касающейся поверхности  $f_l$  в точке  $S^{(l)}$ , может быть определено соотношением:

$$\boldsymbol{S}^{(l)} - \boldsymbol{\rho}_{l} = \frac{\sigma_{0}^{(l)}}{\sigma_{0}^{(l-1)}} \left( \boldsymbol{S}^{(l)} - \boldsymbol{\rho}_{l-1} \right).$$
(4.19)

После достижения ИТН положения С на поверхности  $f_{l+1}$  (рис. 4.5) последняя вовлекается в совместное движение вместе с поверхностями  $f_0, f_1, ..., f_l$ . При этом общая точка контакта находится постоянно в месте расположения ИТН и все центры  $O_0, O_1, ..., O_{l+1}$ расположены на одной прямой, соединяющей положение ИТН с центром  $O_{l+1}$ .

Отметим, что все указанные выше положения и соотношения сохраняются *в любом подпространстве пространства*  $\Sigma^{(5)}$ . При этом если нагружение осуществляется таким образом, что ненулевыми будут только некоторые компоненты девиатора *S*, то отличными от нуля будут только соответствующие компоненты девиатора остаточных микронапряжений  $\rho_i$ ,  $i = \overline{0, n}$  всех поверхностей  $f_{0},...,f_n$ .

Предполагаемая модель может быть обобщена на случай изменения размера поверхностей нагружения  $\sigma_0^{(k)}, k = \overline{0, n}$ , без существенных изменений структуры и соотношений. Из

экспериментов известно, что в процессе нагружения поверхность  $f_0$  может уменьшаться по размерам, тогда как остальные поверхности  $f_1,...,f_n$  испытывают, как правило, расширение. То есть можно принять, что  $\sigma_0^{(k)}$  являются не постоянными, а некоторыми функциями параметра  $\lambda$ ,  $\sigma_0^{(k)} = \sigma_0^{(k)}(\lambda)$ ,  $k = \overline{0,n}$ . Для определения этой зависимости используются эксперименты на циклическое нагружение.

Последующее развитие теории течения связано В значительной мере с различными модификациями предложенной З.Мрузом модели. «Центр тяжести» исследований лежит установлении законов перемещения поверхностей нагружения, их числа и размеров. При определении числа поверхностей возникают два предельных случая – n = 2 и  $n = \infty$ . Наиболее широко применяемой в настоящее время является двухповерхностная модификация модели Мруза. Особенно часто она используется для (непропорционального) описания сложного циклического нагружения. Остановимся вкратце на моделях данного типа.

В этом случае вводится поверхность  $f_0$ , отделяющая область упругого деформирования от пластической зоны и называемая разными авторами **внутренней поверхностью, поверхностью текучести** или **поверхностью нагружения.** Поверхность  $f_0$  в течение всего процесса нагружения не может выходить за границы поверхности  $f_1$ , называемой **внешней поверхностью, граничной поверхностью** или **предельной поверхностью**. Далее для  $f_0$  будем использовать термин «поверхность текучести», а для  $f_1$  – «предельная поверхность». Если в процессе активного нагружения ИТН находится в положении A на поверхности  $f_0$  с единичной внешней нормалью  $n_{f_0}^A$ , то точку A' на поверхности  $f_1$ , имеющую одинаковую единичную внешнюю нормаль, т.е.  $n_{f_0}^{A'} = n_{f_0}^A$ , будем

Одну из первых двухповерхностных теорий предложил Я.Дафалиас и Е. Попов (1975). Система уравнений, определяющих пластическое деформирование, движение и изменение размеров поверхности текучести и предельной поверхности имеют вид:

$$f_0(S - \rho_0, R_0(\lambda)) = 0, \quad f_1(S' - \rho_1, R_1(\lambda)) = 0,$$
 (4.20)

$$\mathbf{R}_{0}(\lambda)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\lambda} = (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\rho}_{0}), \qquad (4.21)$$

$$\frac{\boldsymbol{S'}-\boldsymbol{\rho}_1}{\boldsymbol{R}_1} = \frac{\boldsymbol{S}-\boldsymbol{\rho}_0}{\boldsymbol{R}_0}, \quad \boldsymbol{S'}-\boldsymbol{S} = \boldsymbol{m}_1 \frac{d\boldsymbol{\rho}_1}{d\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{m}_2 \frac{d\boldsymbol{\rho}_0}{d\boldsymbol{\lambda}}.$$
(4.22)

Здесь S' определяет сопряженную точку на поверхности  $f_1$ .

Отметим, что  $R_0(\lambda)$  и  $R_1(\lambda)$ , константы материала  $m_1$  и  $m_2$ определяются из экспериментов (вообще говоря, при сложном циклическом нагружении). При формулировке теории авторы сознательно оставили незамкнутой систему соотношений (4.22) для определения  $S', \rho_0, \rho_1$ , что позволяет в широких пределах варьировать законы изменения поверхностей  $f_0$  и  $f_1$ . Так, Ченгом и Ли (1983) предложена следующая конкретизация предлагаемых соотношений:

$$\boldsymbol{\rho}_{1} = \boldsymbol{\theta},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}_{0}}{d\lambda} + n_{1}\boldsymbol{\rho}_{0} = n_{2}\frac{d\boldsymbol{S}}{d\lambda} + n_{3}\boldsymbol{S}.$$
(4.23)

Более общий случай конкретизации соотношений (4.22) приведен в работе [1\*]:

$$\frac{\mathbf{S'}-\boldsymbol{\rho}_1}{\mathbf{R}_1} = \frac{\mathbf{S}-\boldsymbol{\rho}_0}{\mathbf{R}_0}, \quad \mathbf{S'}-\mathbf{S} = \mathbf{m}_1 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_1}{\mathrm{d}\lambda} - \mathbf{m}_2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0}{\mathrm{d}\lambda} + \mathbf{m}_3 \frac{\mathrm{d}\mathbf{S}}{\mathrm{d}\lambda},$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0}{\mathrm{d}\lambda} + \mathbf{n}_1 \boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{n}_2 \frac{\mathrm{d}\mathbf{S}}{\mathrm{d}\lambda} + \mathbf{n}_3 \mathbf{S}.$$
(4.24)

Наличие большого числа материальных постоянных в последних соотношениях позволяют более точно описать экспериментальные данные, приводя, однако, к потребности более сложных экспериментов, чем в классических теориях пластического течения.

Из других модификаций ТПТ, связанных с введением дополнительных поверхностей, отметим предложенную Н. Оно (1982) теорию с так называемой поверхностью памяти, вводимой в пространстве пластических деформаций. Позднее эта модель была обобщена в работах Н. Оно и Е. Токуды с соавторами, где наряду с поверхностью текучести и предельной поверхностью в пространстве напряжений использовались еще две поверхности памяти, определяемые в пространстве девиаторов пластических деформаций.

### О статистических теориях пластичности

Для большинства материалов, поведение которых описывается теми или иными теориями МДТТ на макроуровне, по мере углубления в микромир характерно выявление микроэлементов материала, обладающих относительно стабильными структурой, механизмами деформирования, физическими характеристиками. В связи с этим в МДТТ (и МСС в целом) одним из наиболее развивающихся интенсивно И, вероятно, перспективных направлений построения определяющих соотношений является статистический подход. Согласно указанному подходу выделяются микроструктурные элементы исследуемого материала, поведение которых описываются однотипными законами (по возможности – простыми), с минимально потребным количеством физических характеристик. Затем для достаточно большой совокупности микроструктурных элементов. составляющих представительный объем материала (в макросмысле), осуществляется статистическое осреднение.

Статистический подход до настоящего времени достаточно успешно применяется в теории упругости. В последние годы предпринимаются энергичные попытки применить его в теории пластичности, ряд из них следует признать достаточно успешными для сегодняшнего состояния теории пластичности. Однако, как отмечают авторы монографии [4], В настоящее время не представляется возможным достичь в теории пластичности хотя бы того же уровня строгости описания, как в теории упругости. В связи с этим ими предлагается так называемый квазистатистический вариант теории пластичности, основанный на ряде допущений и гипотез. В то же время разработанная теория [4] позволяет моделировать основные особенности поведения материалов даже при описании достаточно тонких эффектов. В связи с этим остановимся на этой теории несколько подробнее.

Основы рассматриваемого подхода были заложены в работах Г. Мазинга, Е. Кренера, А.Ю. Ишлинского, Н.Н. Афанасьева, В.В. Новожилова. Отметим, что статистический подход используется не только в теории пластичности – в равной степени он применим в ползучести, вязкоупругости, разрушения и теориях других. Изложение применения подхода в теории пластичности отнесено к разделу теории пластического течения только в связи с тем, что рассматривается вариант здесь статистической теории, использующий во многом схему построения соотношений ТПТ. В то же время статистический подход может быть использован для построения определяющих соотношений, существенно

отличающихся от уравнений ТПТ, например, для соотношений типа частных теорий в рамках теории УПП А.А. Ильюшина.

рассматриваться Будет поликристаллический материал, представляемый совокупностью монокристаллических микроэлементов (зерен, субзерен). Каждый из микроэлементов обладает анизотропией как упругих, так и пластических свойств, а также неодинаковой (с другими элементами) плотностью и конфигурацией дефектов, в основном отвечающих за процессы деформирования. обстоятельства неупругого Указанные предопределяют неравномерность пластических деформаций зерен, образующих область выбранного представительного объема (в инженерном смысле, или в макросмысле).

Для представительного объема поликристаллического тела, состоящего из N «областей однородности» (т.е. совокупностей монокристаллов с примерно одинаковыми свойствами, примерно однородными деформациями и напряжениями), вводится осредненная пластическая деформация ( $\varepsilon^{p}$ ):

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \rangle = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{k})\mathrm{p}} , \qquad (4.25)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)p}$  – деформации в k-й области (вообще говоря, также являющиеся некоторыми осредненными по группе монокристаллов, входящих в «область однородности»),  $\langle \cdot \rangle$  – здесь и далее означает осреднение по материальному объему. Отметим, что k-я область полагается состоящей из микрообъемов, в общем случае не контактирующих друг с другом, но имеющих примерно одинаковые пластические деформации. Обычно области нумеруются в порядке возрастания соответствующих пределов текучести (в случае изотропного упрочнения, или некоторой интегральной характеристики текучести при анизотропном упрочнении). Допускается совпадение пределов текучести в нескольких областях, что позволяет учесть статистическое распределение пределов текучести.

Соотношения типа (4.25) можно записать отдельно для шаровых и девиаторных составляющих тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}$ :

$$\left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{k})\mathrm{p}}, \quad \left\langle \boldsymbol{e}^{\mathrm{p}} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{e}^{(\mathrm{k})\mathrm{p}}.$$
 (4.26)

Обычно для каждой из областей принимается предположение о

пластической несжимаемости, откуда  $\langle \epsilon^{p} \rangle = 0$ . Принимая в дальнейшем гипотезу о линейной связи  $\langle \epsilon \rangle$  и  $\langle \sigma \rangle$ , будем оперировать только с девиаторными составляющими тензоров напряжений и деформаций.

Для каждой из областей в текущий момент нагружения определяется условие текучести; при его выполнении приращения пластических деформаций в соответствующей области будут ненулевыми, в противном случае пластические деформации неизменны.

Аналогично деформациям определяются средние девиаторы напряжений для представительного объема:

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{S}^{(k)},$$
 (4.27)

где **S**<sup>(k)</sup> – средние девиаторы в тех же областях (одинаковых пределов текучести и пластических деформаций).

Из многочисленных экспериментов известно, что при пластическом деформировании не вся энергия, затраченная на деформирование, переходит в тепловую энергию (диссипирует), часть энергии сохраняется в деформированном теле в виде потенциальной энергии. Механизм накопления этой энергии связан неоднородностью деформирования с пластического И несовместностью упругих и пластических составляющих (по отдельности) тензора деформаций, хотя полные деформации в случае сохранения сплошности являются совместными. Отметим, что речь здесь идет о пластических и упругих деформациях, одинаковых в «областях однородности», но отличающихся от области к области; в рамках рассматриваемого подхода указанные деформации относятся к микродеформациям.

По аналогии с феноменологическими макроскопическими теориями можно предположить, что появление добавочной потенциальной энергии (на микроуровне в принятом смысле) связано с появлением добавочных упругих микронапряжений. Тогда девиатор напряжений  $S^{(k)}$  в k-й области можно представить совокупностью диссипативной  $\tau^{(k)}$  и упругой  $\rho^{(k)}$  составляющих:

$$S^{(k)} = \tau^{(k)} + \rho^{(k)}.$$
(4.28)

Для упругих напряжений предполагается, как обычно, что их работа на любом замкнутом цикле деформаций равна нулю, в частности, на

любых замкнутых циклах пластической деформации. Отсюда следует наличие потенциала упругих напряжений, т.е. существование скалярной функции пластических деформаций, первая производная которой по пластическим деформациям определяет  $\rho^{(k)}$ .

В первом приближении можно принять, что упругие напряжения пропорциональны пластическим деформациям:

$$\boldsymbol{\rho}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} C_{kl} \boldsymbol{e}_{ij}^{(l)p}, \quad C_{kl} = C_{lk}, \quad C_{kl} = \text{const}.$$
(4.29)

Для тензора диссипативных напряжений и локальных пластических деформаций полагается выполняющимся соотношение теории течения (по существу, закон сухого трения):

$$\mathbf{d}\boldsymbol{e}^{(k)p} = \frac{\mathbf{d}\lambda_k}{\boldsymbol{\tau}_0^{(k)}}\boldsymbol{\tau}^{(k)}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_k.$$
(4.30)

при выполнении условия текучести:

$$\left|\boldsymbol{\tau}^{(k)}\right| \equiv \left(\boldsymbol{\tau}^{(k)} : \boldsymbol{\tau}^{(k)}\right)^{1/2} = \boldsymbol{\tau}_{0}^{(k)}.$$
(4.31)

где  $\tau_0^{(k)}$  – напряжение текучести (сопротивление деформации) k-й области. Условие текучести и соотношения (4.30) могут быть усложнены учетом изотропного или анизотропного упрочнения.

Главной целью в настоящем подходе является получение соотношений между осредненными девиаторами напряжений  $\langle \boldsymbol{S} \rangle$  и пластических деформаций  $\langle e^{\mathbf{p}} \rangle$  (принципиальных препятствий для введения связей между  $\langle S \rangle$  и  $\langle e \rangle$  нет, поскольку упругие деформации связываются с напряжениями простыми линейными соотношениями). Однако, сожалению, К записанных выше соотношений недостаточно. Затруднения связаны с соотношениями (4.30), не позволяющими определить связь средних диссипативных со средними напряжениями пластических напряжений  $\langle \boldsymbol{\tau} \rangle$  $\partial e \phi o p M a u \check{u} \langle d e^{p} \rangle$ . В связи с этим возникает потребность в дополнительных соотношениях. Э.Кренером было предложено линейное соотношение, связывающее локальные отклонения девиаторов напряжений деформаций И пластических ОТ осредненных:

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle - \boldsymbol{S}^{(k)} = \mathbf{m}_{k} \left( \boldsymbol{e}^{(k)p} - \left\langle \boldsymbol{e}^{p} \right\rangle \right),$$
 (4.32)

где  $m_k$  – константа материала для k-й области. Полагая, что заданным является процесс нагружения, определяемый историей изменения тензора  $\langle S \rangle$ , имеем (4k+1) тензорных (второго ранга) неизвестных  $S^{(k)}, \rho^{(k)}, \tau^{(k)}, e^{(k)p}$  и  $\langle e^p \rangle$  (или  $de^{(k)p}$  и  $\langle de^p \rangle$ ), для определения которых имеем (4k+1) тензорных уравнений ((4.26<sub>2</sub>) – 1 уравнение, (4.28) – k, (4.29) – k, (4.30) – k, (4.32) – k уравнений). Таким образом, приведенная система уравнений является замкнутой.

В теориях определяющих соотношений часто используются два частных случая, применяемые при осреднении микропараметров:

а). Согласно **модели Фойгта** одинаковыми полагаются те или иные составляющие деформаций (или полные деформации). Для случая упругопластичности используется гипотеза об *однородном распределении* в представительном объеме *полных деформаций*:

$$e^{(k)} = e^{(k)e} + e^{(k)p} = \frac{S^{(k)}}{2G} + e^{(k)p} = \langle e \rangle.$$
 (4.33)

Из (4.33) следует:

$$\boldsymbol{S}^{(k)} = 2G(\langle \boldsymbol{e} \rangle - \boldsymbol{e}^{(k)p}), \qquad (a)$$

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = 2G(\langle \boldsymbol{e} \rangle - \langle \boldsymbol{e}^{\mathrm{p}} \rangle).$$
 (6)

Вычитая из (б) соотношение (а), имеем:

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle - \boldsymbol{S}^{(k)} = 2G(\boldsymbol{e}^{(k)p} - \langle \boldsymbol{e}^{p} \rangle).$$
 (6)

Очевидно. что (B) является частным случаем (4.32)в предположении  $m_k = 2G$   $\forall k$ . Можно предложить модификацию гипотезы Фойгта (в скоростной форме), согласно которой одинаковыми по представительному объему считать градиенты вектора скорости перемещения  $\nabla v$ . При этом возможно аддитивное представление движения микрообъемов, во-первых, суммой деформаций скорости  $\boldsymbol{D}^{(k)}$  и вихря  $\boldsymbol{W}^{(k)}$ , во-вторых, каждую из этих составляющих можно разложить на компоненты,

отвечающие за упругую и неупругую скорости деформации  $(\boldsymbol{D}^{\mathrm{e(k)}}, \boldsymbol{D}^{\mathrm{p(k)}})$  и поворот кристаллической решетки  $(\boldsymbol{W}^{\mathrm{c(k)}})$  и «материальный» поворот  $(\boldsymbol{W}^{\mathrm{m(k)}})$ .

б). Другой частный случай, известный в МСС и ТОС под названием **гипотезы** Рейсса, полагает *однородным распределение напряжений* (а следовательно, девиаторов напряжений) в пределах представительного объема, т.е.

 $\boldsymbol{S}^{(k)} = \left\langle \boldsymbol{S} \right\rangle. \tag{4.34}$ 

Нетрудно видеть, что соотношение (4.34) следует из (4.32) при условии  $m_k = 0 \quad \forall k$ .

Отметим, что гипотезы, приведенные выше, использовались Фойгтом и Рейссом при определении эффективных модулей упругости поликристаллов, в настоящее время они часто применяются в механике композитов. При этом ни одна из гипотез не обеспечивает точного соответствия теоретических и экспериментальных данных. Соотношения Кренера содержат набор параметров  $m_k$ , позволяющих за счет их выбора повысить данное соответствие.

Используя в приведенных соотношениях разное число элементов N, можно получить различные приближенные теории пластичности. Понятно, что увеличение числа элементов (а следовательно – числа степеней свободы модели) позволяет повышать точность определяющих соотношений.

Простейший вариант теории получается при N=1 и соответствует известной модели А.Ю. Ишлинского.

Здесь остановимся на другом крайнем варианте – с бесконечно большим числом элементов.

Следуя [4], вводятся обозначения:  $E^{p}, \Sigma, T$  – случайные тензоры девиаторов пластических деформаций, напряжений и диссипативных сил сопротивления пластическому деформированию; обозначения  $e^{p}, S, \tau$  сохраняются для реализаций соответствующих случайных тензоров. Принимается справедливой *эргодическая гипотеза*, вследствие чего от осреднения по объему осуществляется переход к осреднению по множеству реализаций при сохранении обозначения  $\langle \cdot \rangle$  для осредненных величин.

физического Из анализа процесса пластического деформирования важнейшими известно, ЧТО параметрами, определяющими движение дислокаций, реализующее пластическое формоизменение, характеристики являются различного вида препятствий (частицы включений, дислокации леса, барьеры различных типов и т.д.). «Мощность» и конфигурация этих препятствий являются стохастическими параметрами. Аналогом последних при континуальном рассмотрении можно считать диссипативные силы сопротивления пластическим деформациям, которые, в свою очередь, будут определять микродеформации и микронапряжения. В связи с вышесказанным, несколько упрощая модель, полагается, что единственным случайным параметром является интенсивность диссипативных сил  $T_u$  (реализации обозначаются через  $\tau_u$ ). При этом полагается, что плотность распределения  $p(\tau_u)$  этой случайной величины известна. В соответствии  $p(\tau_u)$  можно поставить функцию распределения  $\xi = \Phi(\tau_u) = \int_{0}^{\tau_u} p(\tau_u') d\tau_u'$ .

$$\langle \boldsymbol{e}^{\mathrm{p}} \rangle = \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}(\tau_{\mathrm{u}}) \mathrm{d}\Phi(\tau_{\mathrm{u}}) = \int_{0}^{1} \boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}(\xi) \mathrm{d}\xi,$$
 (4.35)

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{S}(\tau_{u}) d\Phi(\tau_{u}) = \int_{0}^{1} \boldsymbol{S}(\xi) d\xi.$$
 (4.36)

Гипотеза Кренера принимается практически без изменения (за исключением определения осредненных величин):

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle - \boldsymbol{S} = m \left( \boldsymbol{e}^{p} - \left\langle \boldsymbol{e}^{p} \right\rangle \right), \quad m = \text{const}.$$
 (4.37)

Локальный закон, соответствующий теории пластического течения, записывается в виде:

$$d\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}} = \frac{d\lambda}{\tau_{\mathrm{u}}}\boldsymbol{\tau} \,. \tag{4.38}$$

Аналогом соотношения (4.29) выступает следующее соотношение:

$$\rho(\xi) = \int_{0}^{1} C(\xi, \xi') e^{p}(\xi') d\xi', \qquad (4.39)$$

Тогда обобщение соотношения (4.28) представимо в виде:
$$\tau = S - \int_{0}^{1} C(\xi, \xi') e^{p}(\xi') d\xi',$$
  
или  
$$\tau = S - \int_{0}^{\infty} C(\tau_{u}, \tau_{u}') e^{p}(\tau_{u}') d\Phi(\tau_{u}').$$
(4.40)

Заметим, что в силу ограничения на константы  $C_{kl}$  в (4.29), в (4.40) ядро  $C(\xi,\xi')$  должно быть симметричным.

Вводя обозначение  $C'(\xi,\xi') = C(\xi,\xi') - m$  и подставляя (4.37) в (4.40), получаем:

$$\boldsymbol{\tau} = \langle \boldsymbol{S} \rangle - \mathbf{m} \boldsymbol{e}^{\mathrm{p}} - \int_{0}^{1} \mathbf{C}'(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') \boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{\xi}') d\boldsymbol{\xi}'.$$
(4.41)

Нетрудно видеть, что система соотношений (4.35), (4.38), (4.41) позволяет по заданной истории осредненных напряжений  $\langle S \rangle$  определить историю осредненных пластических деформаций  $\langle e^{p} \rangle$ .

Использованный здесь подход к построению определяющих соотношений вплотную примыкает к физическим теориям и может быть использован при формулировке определяющих соотношений в различных разделах МСС.

### 5. Эндохронная теория пластичности

Как видно из предшествующего материала, установление законов эволюции поверхности (поверхностей) нагружения представляет собой непростую задачу. В связи с этим в построении теории пластичности, начиная с работ А.А. Ильюшина, не прекращались попытки сформулировать определяющие соотношения теории пластичности, позволяющие описывать процессы произвольного нагружения, и в то же время не содержащие понятие поверхности текучести. К этому же типу теорий относится предложенная в 1971 г. К. Валанисом эндохронная теория пластичности (ЭТП) [3, 3\*-5\*], интенсивно развивающаяся в настоящее время. В основу теории положено понятие так называемого внутреннего времени, что и обусловливает название теории (в последнее вошли два греческих слова: эндо – внутренний и хронос – время). Определяющий функционал ЭТП имеет сравнительно простую структуру наследственного типа, по виду не отличающуюся от функционала линейной вязкоупругости, однако с заменой физического времени на внутреннее время.

В настоящем разделе будет использоваться в основном векторное представление процессов нагружения (деформирования). В первоначальном варианте ЭТП К. Валанис использовал следующий вид определяющего соотношения:

$$\Sigma = \int_{0}^{3} J(z - z') d\vartheta(z').$$
(5.1)

Внутренне время z определялось соотношением:

$$dz = \frac{ds}{f(s)}, \ f(s) > 0 .$$
(5.2)

В последнем соотношении функция f(s) ответственна за эффекты изотропного упрочнения (разупрочнения) и называется обычно *функцией упрочнения*; материал является упрочняющимся, если df/ds>0, и разупрочняющимся, если df/ds<0. Как и ранее, ds обозначает длину элементарного участка траектории (полных) деформаций.

Для согласования со свойством затухающей памяти ядро функционала (5.1) должно быть убывающей функцией внутреннего времени z, dJ(z)/dz<0. Для конкретизации вида функции J(z) часто используются известные в теории вязкоупругости реологические соотношения. В частности, в ЭТП широко используется обобщенная модель Максвелла, для которой

$$J(z) = \sum_{i=1}^{N} E_{i} e^{-\alpha_{i} z} .$$
 (5.3)

Здесь Е<sub>i</sub>,  $\alpha_i$  – материальные постоянные, определяемые в экспериментах на сложное нагружение.

Несмотря на очевидную простоту ОС ЭТП, они позволили качественно описать многие интересные эффекты, наблюдаемые при пластическом

деформировании. В частности, ЭТП качественно достаточно хорошо описывает эффекты линейного и нелинейного упрочнения, гистерезис и стабилизацию циклическом деформировании, "нырок" петель гистерезиса при в напряжений окрестности интенсивности В точки излома траектории деформации и ряд других. В то же время количественное соответствие экспериментальных данных и результатов расчетов с помощью ЭТП (в рассматриваемом начальном варианте) нельзя признать удовлетворительным.

Причиной указанного несоответствия является, вероятно, отсутствие в OC (5.1)-(5.3) зависимости от сложности нагружения, "переупрощенность" уравнений по сравнению с общим видом OC пластичности или с достаточно общей истокообразной формой (3.23) определяющих соотношений. Например, приращение напряжений (с точностью до знака) при приращении деформации  $d\mathfrak{i}$ , по сути дела, одинаково как для активного деформирования ( $\Sigma \cdot d\mathfrak{i} > 0$ ), так и для пассивного деформирования ( $\Sigma \cdot d\mathfrak{i} < 0$ ). С физической точки зрения подобный факт представляется необъяснимым.

В работе [5<sup>\*</sup>] на основе разложения общего функционала пластичности в ряд Фреше-Вольтерра отмечается, что рассмотренный первоначальный вариант ЭТП с достаточной точностью может быть использован для описания процессов деформирования по траекториям кривизны не выше средней. Более сложные траектории (например, большой кривизны или с изломами) описываются соотношениями (5.1)-(5.3) лишь приближенно. Иначе говоря, несоответствие экспериментальных и теоретических данных являются не следствием неверно определенных материальных констант или неверным набором экспериментов, внутренне присуще рассматриваемым a определяющим соотношениям. В силу этого первоначальный вариант ЭТП был подвергнут основательной критике в многочисленных публикациях, что побудило приверженцев ЭТП (включая ее автора) к созданию "исправленных вариантов" ЭТП.

Одним из возможных подходов, отмеченных в [4<sup>\*</sup>, 5<sup>\*</sup>], является усложнение вида функционала, представление его в виде суммы кратных интегралов по внутреннему времени. Однако реализация подобного подхода связана с труднопреодолимыми сложностями (включая экспериментальные исследования).

Другой вариант модификации ЭТП предложен Ю.И. Кадашевичем и А.Н. Михайловым [6<sup>\*</sup>]. В цитируемой работе предлагается так называемое **тензорно-параметрическое представление** определяющего функционала:

$$\Sigma = \int_{0}^{z} L_{1}(z-z') d\mathbf{R}(z'), \quad dz = \frac{dR}{f(R)}, \quad dR = |d\mathbf{R}|,$$
  
$$\Im = \int_{0}^{z} L_{2}(z-z') d\mathbf{R}(z').$$
(5.4)

Здесь используется вспомогательный вектор **R**, вид которого заранее не конкретизируется; полагается, что этот вектор характеризует влияние микродеформаций и микронапряжений на процесс упругопластического

деформирования (в смысле деформирования представительного макрообъема). Введение двух ядер  $L_1$  и  $L_2$  вместо одного в первоначальном варианте ЭТП позволяет существенно расширить возможности теории, однако делает ее более сложной. Для практических расчетов предлагается использовать упрощенный вариант этой модификации, записанный в дифференциальной форме:

$$\Sigma + a_1(z)\frac{d\Sigma}{dz} = b_1(z)\mathbf{R} + c_1(z)\frac{d\mathbf{R}}{dz},$$
  

$$\mathbf{i} + a_2(z)\frac{d\mathbf{i}}{dz} = b_2(z)\mathbf{R} + c_2(z)\frac{d\mathbf{R}}{dz}.$$
(5.5)

Определение функций  $a_i(z)$ ,  $b_i(z)$ ,  $c_i(z)$  (i=1,2) требует проведения экспериментов на сложное нагружение. В рамках приведенной модификации ЭТП остается открытым вопрос об определении вспомогательного вектора **R**; в ряде работ в качестве последнего предлагается использовать вектор пластических деформаций  $\mathfrak{d}_p = \mathfrak{d} - \frac{\Sigma}{F}$ .

Другое направление модифицирования ЭТП связано с изменением меры внутреннего времени при сохранении исходной структуры уравнений. Одним из первых модификацию такого типа предложил автор теории К. Валанис, введя новую меру внутреннего времени следующими соотношениями:

$$dz = \frac{d\xi}{f(\xi)}, \quad d\xi = \left| d\vartheta - \chi \frac{d\Sigma}{E} \right|, \quad (5.6)$$

где Е – модуль упругости,  $\chi$  – новый параметр. В исходном варианте теории физический смысл параметра  $\chi$  не обсуждался, полагалось, что  $\chi \in [0,1]$ .

Другой вариант изменения меры внутреннего времени был предложен А.Б. Мосоловым (1980 г.). Им была введена явная зависимость меры внутреннего времени от геометрических характеристик процесса деформирования:

$$dz = \varphi(z, \sigma_u, v_1) ds, \qquad (5.7)$$

где  $\sigma_u = |\Sigma|$ ,  $v_1 = \arccos\left(\mathbf{p}_1 \cdot \Sigma/|\Sigma|\right)$ ; функция  $\phi(\cdot)$  устанавливается

экспериментально.

Применение предложенной К. Валанисом новой меры внутреннего (5.6)существенно времени позволило улучшить соответствие экспериментальных и теоретических результатов. Однако и данный вариант ЭТП не освободился от недостатков первоначальной формулировки теории.К числу последних относятся нарушение постулатов Драккера и Ильюшина, появление в теоретических результатах не свойственных теории пластичности эффектов циклической ползучести и релаксации напряжений. В попытках избежать этих недостатков в значительном числе работ стали полагать параметр  $\gamma$  равным единице. Однако, как показано в работе [5<sup>\*</sup>], это привело к возникновению сингулярности в соотношениях и появлению в теории поверхности текучести. Ho тем самым теория исходных лишается преимуществ, декларированных при ее формулировке с самого начала.

Обратимся к анализу физического смысла параметра  $\chi$ , проведенного впервые Ю.И. Кадашевичем и А.Б. Мосоловым (1988 г.); изложение следует в основном работе [5<sup>\*</sup>]. В основу анализа положен один из способов замыкания определяющих соотношений, используемый в статистической теории пластичности.

Рассматривается представительный (в макросмысле) объем состоящий поликристаллического материала, большого ИЗ числа монокристаллов ("зерен"). В пределах каждого из зерен напряженнодеформированное состояние (микронапряжения и микродеформации) считается однородным. Кроме того, примем гипотезу Рейсса, согласно которой  $\langle \sigma \rangle = \sigma$ . Полагается, что каждое из зерен находится либо в упругом, либо в неупругом состоянии. Следует отметить, что, вообще говоря, здесь неявным образом вводится критерий упругого (или неупругого) поведения материала на микроуровне. В цитируемом источнике, к сожалению, не рассматривается данный вопрос. В то же время указанный критерий, по существу, является аналогом поверхности текучести на микроуровне, что несколько нарушает последовательность теории в части "отсутствия в ней поверхности текучести".

Для элемента, находящегося в упругом состоянии, приращение деформаций

$$d\mathbf{\mathfrak{z}} = d\mathbf{\mathfrak{z}}^e = \frac{d\langle \mathbf{\Sigma} \rangle}{E} ; \qquad (5.8)$$

для элемента в неупругом состоянии полагается

$$d\mathbf{\mathfrak{9}}^{p} = d\mathbf{R}, \qquad (5.9)$$

где **R** – вектор неупругих микродеформаций; <-> означает осреднение. Обозначим через  $\chi$  вероятность реализации неупругого состояния некоторого выделенного элемента, тогда (1-х) – вероятность нахождения его В Далее, пластическом состоянии. следуя vже используемой схеме. представляется естественным определить осредненное значение приращения деформаций дэ соотношением:

$$d\langle \mathbf{y} \rangle = \chi \, d\mathbf{y}^e + (1 - \chi) \, d\mathbf{y}^p = \chi \, d\mathbf{y}^e + (1 - \chi) \, d\mathbf{R} \,. \tag{5.10}$$

Говоря о схеме, мы имеем в виду структурно-механическую модель на микроуровне: по существу, модель Рейсса предполагает линейную цепочку элементов с различными физико-механическими характеристиками. Понятно, что в такой модели, напряжения в каждом элементе одинаковы, а деформация определяется суммой деформаций элементов. Отметим также, что принимается справедливым правило коммуникативности оператора осреднения и дифференцирования.

Если χ=const, то соотношение (5.10) эквивалентно соотношению в конечных значениях:

$$\langle \mathbf{\mathfrak{s}} \rangle = \chi \mathbf{\mathfrak{s}}^e + (1 - \chi) \mathbf{R},$$
 (5.10')

в общем случае, при χ≠const, соотношения (5.10) и (5.10') не эквивалентны.

78

Отметим, что в реальных материалах упругие и неупругие микродеформации связаны друг с другом. В данном случае это следует из соотношений: напряжения  $\langle \Sigma \rangle$  в агрегате из упругих и неупругих элементов,

конечно, зависят от истории изменения **R**, но тогда и  $d\mathfrak{r}^e = \frac{d\langle \Sigma \rangle}{E}$  зависят от **R**. Вид зависимости  $\mathfrak{r}^e \sim \mathbf{R}$  в общем случае неизвестен. В качестве простейшей формы подобного соотношения в [5<sup>\*</sup>] предлагается следующее:

$$\frac{d\mathbf{\mathfrak{s}}^{e}}{d\ R} + \alpha \mathbf{\mathfrak{s}}^{e} = \frac{d\ \mathbf{R}}{d\ R}, \quad dR = \left| d\mathbf{R} \right|. \tag{5.11}$$

Выражая из последнего соотношения  $d\mathbf{R}$  и подставляя данное выражение в (5.10), получаем:

$$d\langle \mathbf{y} \rangle = d\mathbf{y}^e + \alpha \mathbf{y}^e (1-\chi) dR$$

Из (5.10):

$$(1-\chi)|d\mathbf{R}| \equiv (1-\chi)dR = |d\langle \mathbf{y}\rangle - \chi d\mathbf{y}^e| = |d\langle \mathbf{y}\rangle - \chi \frac{d\langle \mathbf{\Sigma}\rangle}{E}|$$

Тогда окончательно:

$$d\langle \mathbf{\Sigma} \rangle = E \ d\langle \mathbf{\vartheta} \rangle - \alpha \langle \mathbf{\Sigma} \rangle \ dz , \qquad (5.12)$$

где

$$dz = (1 - \chi) dR = \left| d\langle \mathfrak{s} \rangle - \chi \frac{d\langle \Sigma \rangle}{E} \right|.$$
 (5.13)

Полученное уравнение (5.12) совпадает с уравнением эндохронной теории в исходной форме при  $J(z)=E e^{-\alpha z}$  и новой мерой внутреннего времени (5.13), соответствующей (5.6). Однако здесь параметр  $\chi$  имеет ясно выраженный физический смысл – в каждый момент деформирования  $\chi$  определяет вероятность реализации упругого состояния.

Отметим, что широко используемому варианту  $\chi = 1$  отвечает предельный случай  $\chi \rightarrow 1$ ; согласно приведенной интерпретации параметра  $\chi$  ситуации  $\chi \rightarrow 1$ соответствует нахождение почти всех элементов в упругом состоянии. В этом случае пластическая деформация локализуется в незначительном числе микроэлементов. Подобная ситуация действительно возникает в некоторых процессах деформирования, о чем свидетельствуют экспериментальные данные по микроструктуре. Однако в общем случае деформирования, особенно при пластическое траекториях деформации, В деформирование сложных вовлеченной значительная доля материала. Иначе говоря, оказывается предположение  $\chi=1$  не имеет достаточного обоснования с позиций физики неупругого деформирования.

Другой крайний случай ( $\chi \rightarrow 0$ ) соответствует ситуации, когда почти все микроэлементы находятся в пластическом состоянии. При использовании понятия поверхности текучести данная ситуация имеет место при стремлении к нулю радиуса поверхностей текучести микроэлементов, что, в свою очередь, отвечает стремлению к нулю допуска на пластические деформации.

В общем случае реалистичным следует признать значение  $\chi$  в интервале [0,1]. При этом значение  $\chi$  в рамках предложенной интерпретации существенно зависит от субструктуры дефектов кристаллической решетки. Поскольку последняя претерпевает значительные изменения в процессе пластического деформирования, то и параметр  $\chi$  должен зависеть от истории деформирования. В рамках макроскопической теории эта зависимость должна носить, вообще говоря, функциональный характер. В общем виде такое соотношение может быть представлено следующим образом:

$$\boldsymbol{\chi} = \Im \left( \stackrel{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^t, \boldsymbol{\theta}^t, \boldsymbol{\alpha}^t \right), \tag{5.14}$$

где, как обычно,  $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^{t}$  – история градиента места,  $\theta^{t}$  – история изменения температуры,  $\mathbf{a}^{t}$  – история изменения воздействий немеханической природы. Вероятно, первый вариант учета зависимости  $\chi$  от процесса деформирования был предложен в работах А.Б. Мосолова (1980 г.), где принималось следующее соотношение:

$$\chi = \chi \left( s, \sigma_u, v_1 \right), \tag{5.15}$$

 $\sigma_u = |\Sigma|, v_1 = \arccos\left(\mathbf{p}_1 \cdot \frac{\Sigma}{|\Sigma|}\right), s - длина дуги деформаций. Отметим, что в$ 

приведенном соотношении  $\chi$  – функция (а не функционал) аргументов, однако зависимость от истории входит опосредовано.

ЭТП можно отнести к **феноменологическим макроскопическим теориям.** В связи с этим следует отметить необходимость разработки программ и проведения экспериментов на сложное нагружение. Подробно указанные проблемы рассматриваются в работах [4<sup>\*</sup>, 5<sup>\*</sup>].

Остановимся на некоторых направлениях развития современной ЭТП.

Как отмечено выше, в значительном числе работ по ЭТП в качестве ядра интегрального соотношения используется ядро, принятое в обобщенной модели Максвелла (5.3). Напомним, что соотношения Максвелла с ядром (5.3) соответствует **многоэлементной модели** с конечным набором (спектром) времен релаксации. Использование данной модели в линейной вязкоупругости не вызывает затруднений, поскольку в этом случае в качестве аргумента принимается единое для всех элементов физическое время t.

При применении обобщенной модели Максвелла в многоэлементной ЭТП естественно принять для каждого из этих структурных элементов свое внутреннее время. Ядро определяющего функционала имеет в этом случае вид:

$$J = \sum_{i=1}^{N} E_{i} e^{-\alpha_{i} z_{i}}$$
 (5.16)

Можно ввести структурно-механическую модель многоэлементной ЭТП, состоящую из N параллельно соединенных элементов, описываемых ЭТП со своими материальными константами и внутренним временем.

Количество элементов зависит от требуемой точности теории и сложности исследуемых процессов деформирования. В пределе можно перейти

к бесконечному числу элементов с некоторым статистическим распределением

спектра внутреннего времени. Пусть h – некоторый параметр, определяющий спектр внутреннего времени,  $\Phi(h)$  – функция плотности распределения параметра h. Функционал ЭТП в этом случае может быть записан в виде:

$$\Sigma = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{z_{h}} J_{h}(z_{h} - z_{h}') d\vartheta(z_{h}') d\Phi(h), \qquad (5.17)$$

где

$$\mathbf{J}_{\mathrm{h}}(\mathbf{z}) = \mathbf{E}_{\mathrm{h}} \ \mathbf{e}^{-\alpha_{\mathrm{h}}\mathbf{z}},\tag{5.18}$$

$$dz_{h} = \frac{d\xi_{h}}{f_{h}(\xi_{h})}, \quad d\xi_{h} = \left| d\vartheta - \chi \frac{d\Sigma_{h}}{E_{h}} \right|.$$
(5.19)

По существу, указанные соотношения можно использовать взамен соотношений ТПТ в квазистатистическом подходе, рассмотренном в предыдущем разделе, без существенного изменения структуры теории.

Представляется необходимым отметить еще одно направление развития ЭТП, связанное с учетом временных эффектов. В классической теории пластичности постоянно подчеркивается, что физическое время в этой теории не должно входить в определяющие соотношения. В то же время невозможно игнорировать тот факт, что процессы неупругого деформирования происходят одновременно по нескольким (вероятно, многим) физическим механизмам, для ряда из которых физическое время является существенным параметром. Отделить деформирование по различным физическим механизмам практически невозможно, можно говорить только о преобладании, лидирующей роли одних по сравнению с другими в определенных диапазонах воздействий. При этом следует иметь в виду, что малый вклад того или иного механизма в собственно процесс деформирования (изменения конфигурации представительного объема в макросмысле) не говорит еще о его малой роли, поскольку данный механизм может играть роль аккомодационного, существенно влияющего на лидирующие механизмы неупругого деформирования. О существенной роли временных эффектов говорят и результаты макроэкспериментов, проведенных в последние годы. Эксперименты обнаруживают важную роль временных эффектов даже при комнатной температуре в широком интервале скоростей деформирования (10<sup>-8</sup>...10<sup>1</sup>) с<sup>-1</sup>, в особенности – при сложном нагружении. Вышесказанное определяет интерес к временным эффектам и попытке их включения в ЭТП, предпринимаемые особенно интенсивно в последние 10-15 лет.

Следует отметить, что структура соотношений ЭТП позволяет без особых сложностей учесть указанные эффекты. Данное обстоятельство использовал создатель ЭТП К. Валанис, предложивший меру внутреннего времени, учитывающую пластические и вязкие эффекты:

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{1}{f(\lambda)}, \quad (d\lambda)^2 = (ds)^2 + g^2(dt)^2.$$
 (5.20)

Позднее были предложены другие варианты учета временных эффектов, как за счет изменения вида определяющего функционала, так и за счет введения

других мер внутреннего времени. Так, например, Охаши предложил следующую меру:

$$dz = g(\sigma_u, t) dt .$$
(5.21)

Как уже отмечалось выше, в ЭТП вообще не требуется наличие единой меры внутреннего времени. Например, в многоэлементных вариантах ЭТП для ряда элементов можно вводить меры, связанные с физическим временем; можно рассмотреть модели, имеющие непрерывный спектр, содержащий физическое время.

## 6. О физической теории пластичности

Под общим названием физической теории пластичности (ФТП) здесь будет пониматься широкий класс теорий пластичности, в основе формулировок определяющих соотношений, гипотез и основных положений которых лежит рассмотрение в явной форме механизмов деформирования на мезо- и (т.е. масштабных микромасштабах уровнях, меньших уровня представительного объема в макросмысле, или представительного объема в инженерном смысле). Установление масштабных уровней, вовлекаемых в рассмотрение в конкретном варианте ФТП, определяется требованиями постановки задачи, особенностями исследуемых исходной процессов, известными сведениями или гипотетическими представлениями о лидирующих и аккомодационных процессах, определяющих неупругое деформирование. Решение вопроса о выборе уровней не лишено и субъективного компонента квалификации исследователя, его приверженности тем или иным подходам, доступностью тех или иных инструментальных средств и т.д. В настоящее время диапазон микромасштабов чрезвычайно широк – от  $10^{-19}$  см<sup>3</sup> до  $10^{-3}$  см<sup>3</sup>.

Здесь будут рассмотрены соотношения ФТП только для моно- и поликристаллических материалов (большей частью – металлов), однако подходы и некоторые гипотезы могут быть использованы при построении определяющих соотношений более широкого класса материалов. Изложение в значительной степени опирается на работы [5, 6].

Напомним некоторые сведения из физики твердого тела (ФТТ). Большинство из используемых в практике металлов представляют собой поликристаллические материалы, состоящие из зерен (субзерен) с относительно правильной кристаллической решеткой одного трех ИЗ типов: гранецентрированной кубической (ГЦК), объемноцентрированной кубической (ОЦК) или гексагональной плотноупакованной (ГПУ). Вопрос о природе неупругих деформаций являлся и является одним из основных для металловедов, физиков, механиков, инженеров. Существовавшее в начале ХХ века предположение о сдвиге атомных плоскостей идеального кристалла относительно как неупругого друг друга возможном механизме деформирования столкнулось с огромным расхождением теоретических и экспериментальных данных. Теоретические расчеты давали оценку для критического напряжения сдвига в интервале  $G/30 \div G/(2 \cdot \pi)$ , где G – модуль сдвига. Однако эксперименты, проведенные на широком классе отожженных кристаллов различных металлов, показывают, что значения сдвиговых критических напряжений равны (10<sup>-6</sup>÷10<sup>-4</sup>)G. Объяснение этому было дано в середине 30-х годов нашего столетия, в первую очередь в работах Тейлора, Орована и Поляньи. Отмеченное несоответствие объяснялось цитируемыми авторами и другими исследователями наличием в кристаллах специфических линейных дефектов — дислокаций. В этом случае для осуществления неупругого деформирования нет необходимости одновременного разрушения связей всех соседствующих вдоль плоскости сдвига атомов, достаточно

локального разрушения таких связей вдоль линии дислокации. Установление такого типа дефектов в качестве основного "носителя" неупругой деформации позволило существенно улучшить соответствие теоретических и экспериментальных данных.

К основным типам дислокаций относятся винтовые и краевые. В разделе будут в основном рассматриваться настоящем последние, ДО времени считающиеся В микромеханике настоящего основными материальными носителями неупругой деформации (данное утверждение является спорным). Краевая дислокация характеризуется своей плоскостью скольжения, положение которой будем определять единичной нормалью  $\mathbf{n}_0$ , направленной в сторону экстраплоскости, и вектором Бюргерса b, лежащим в залегания характеризующим несоответствие плоскости И контуров, окружающих одиночную краевую дислокацию, и аналогичного контура в идеальном кристалле. Единичный вектор в направлении вектора Бюргерса будет обозначаться как  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ .

Отметим, что в кристаллических телах плоскости залегания и ориентация векторов Бюргерса, вдоль которых осуществляется трансляционное движение (скольжение) краевых дислокаций известны. Так, в ГЦК-металлах скольжение краевых дислокаций осуществляется в плоскостях системы {111} по направлениям <110>(иначе говоря, в системе скольжения {111}, <110>). В ОЦК-решетке трансляционное движение краевых дислокаций осуществляется в плоскости {110}, {112} или {123} по направлениям <111>.

Из опытов, активно проводимых с 20-х годов на монокристаллах, известно, что деформирование осуществляется за счет сдвига одних частей кристалла относительно других при прохождении краевых дислокаций по так называемым активным системам скольжения. При этом было установлено, что условием активации k-й системы скольжения является достижение касательного напряжения в ней некоторого критического напряжения  $\tau_0^{(k)}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} \colon \mathbf{n}_0^{(k)} \mathbf{b}_0^{(k)} = \boldsymbol{\tau}_0^{(k)}. \tag{6.1}$$

Диада  $\mathbf{n}_{0}^{(k)}\mathbf{b}_{0}^{(k)}$  представляет ориентационный тензор k-ой системы скольжения; чаще в литературе в качестве ориентационного тензора  $\mathbf{M}^{(k)}$  k-ой системы используется симметричная часть диадного произведения:

$$\mathbf{M}^{(k)} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{n}_{0}^{(k)} \mathbf{b}_{0}^{(k)} + \mathbf{b}_{0}^{(k)} \mathbf{n}_{0}^{(k)} \right).$$
(6.2)

Условие (6.1) в литературе обычно называется законом Шмида, устанавливающим момент начала неупругого деформирования при достижении в системе скольжения критического значения касательного напряжения. При реализации (6.1) в одной системе скольжения говорят об одиночном скольжении. Если кристалл подвергается нагружению, при котором дислокации начинают скользить в двух или более системах, то говорят о двойном или множественном скольжении.

Рассмотрим одиночный кристалл, ориентированный на одиночное скольжение краевых дислокаций в направлении оси  $x_1$  в плоскости  $x_1Ox_3$  (единичная нормаль  $\mathbf{n}_0$  ориентирована вдоль оси  $Ox_2$ ). Размеры кристалла вдоль

осей  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  обозначим соответственно через  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ . Тогда прохождение одиночной дислокации с вектором Бюргерса **b** приводит к сдвигу одной части кристалла относительно другой, величина которого может быть приближенно (в среднем) оценена сдвиговой деформацией

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a_2}\right) \approx \frac{b}{a_2}.$$

Если дислокация «прошла» лишь некоторую часть  $\Delta a_1$  кристалла вдоль оси  $x_1$ , то можно принять, что сдвиг составляет часть  $\Delta a_1/a_1$  от введенного выше. Тогда, вводя среднюю длину свободного пробега дислокаций  $\lambda$  и полагая, что подвижными являются n дислокаций данной системы скольжения, определяем величину сдвига следующим соотношением:

$$\gamma = b\rho\lambda , \qquad (6.3)$$

где  $\rho$  – плотность подвижных дислокаций (в данном случае  $\rho$ = n  $a_3/(a_1a_2a_3)$  =  $n/(a_1a_2)$ ). Соотношение (6.3) может быть записано для любой k-ой системы скольжения:

$$\gamma^{(k)} = b^{(k)} \rho^{(k)} \lambda^{(k)}, \quad \mathfrak{I}k \tag{6.4}$$

Плотность дислокаций в металлах меняется в широких пределах – от 10<sup>6</sup>- $-10^{8}$  $\mathrm{CM}^{-2}$ отожженных кристаллах  $10^{12} - 10^{13}$  $\mathrm{cm}^{-2}$ в ЛО В сильно деформированных. Существуют специальные способы термообработки. позволяющие снизить плотность дислокаций до 10<sup>3</sup> см<sup>-2</sup>.

Принимая плотность дислокаций постоянной и дифференцируя соотношение (6.3), можно для каждой системы скольжения получить выражение для скорости сдвига:

$$\dot{\gamma} = b\rho v , \qquad (6.5)$$

где v – средняя скорость движения дислокаций. Суммируя скорость сдвига по всем системам скольжения рассматриваемого кристалла, для монокристалла, деформируемого только путем скольжения краевых дислокаций, можно следующим образом определить девиатор тензора деформаций скорости:

$$\mathbf{d}^{\mathrm{p}} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{M}^{(k)} \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(k)} \,. \tag{6.6}$$

В общем случае скольжения и переползания краевых и движения винтовых дислокаций выражения для девиатора деформаций скорости имеет вид:

$$\mathbf{d}^p = -\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{N} \,, \tag{6.7}$$

где ∈ – тензор Леви-Чивиты,

N – тензор третьего ранга, определяемый соотношением:

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{f} \, \mathbf{v} \, \mathbf{l} \, \mathbf{b} \, (\mathbf{d} \, \mathbf{l}) (\mathbf{d} \, \mathbf{b}). \tag{6.8}$$

В последнем соотношении  $f(\mathbf{b}, \mathbf{l}, \mathbf{r}) - функция распределения дислокаций в точке$ **r**по параметрам**b**и**l**, где**l**– единичный вектор, направленный вдоль линии дислокации (для винтовой дислокации совпадает с направлением вектора Бюргерса; для краевой дислокации векторы**l**,**b**,**n**<sub>0</sub> составляют правую тройку).

Отметим, что наряду с дислокационными механизмами вклад в неупругое деформирование вносят и такие механизмы, как движение точечных дефектов

(вакансий и межузельных атомов), зернограничное скольжение (ЗГС). Существенное значение имеет самоорганизация дефектных субструктур; при больших деформациях необходим учет ротационных мод деформации.

Соотношение (6.1) часто используется в качестве критерия текучести в физической теории пластичности не только для определения момента начала текучести, но и для произвольного момента деформирования. В этом случае  $\tau_0^{(k)}$  зависит от истории деформирования. При одиночном скольжении по k-ой активной системе скольжения происходит обычно увеличение критического напряжения  $\tau_0^{(k)}$  активной системы, называемое *деформационным* («активным») *упрочнением* и зависящее от величины сдвига. Наряду с этим наблюдается увеличение критических напряжений в других системах, где сдвиг в процессе одиночного скольжения отсутствует; такое увеличение  $\tau_0^{(1)}$  называется *скрытым* («латентным») *упрочнением*. Последнее обусловлено увеличением плотности дислокациями леса) для других систем скольжения, равно как и других барьеров дислокационного происхождения.

Как показывают эксперименты, при множественном скольжении увеличение критического напряжения сдвига на единицу сдвига оказывается большим, чем при одиночном скольжении. Тейлором был предложен закон упрочнения, согласно которому приращения изотропного критических активных системах касательных напряжений BO всех скольжения одинаковы и определяются суммарным сдвигом по всем активным системам. Указанный закон широко используется в различных модификациях физической теории пластичности. Кроме того, во многих работах принимается, что деформационное и скрытое упрочнения также одинаковы, данное предположение будет принято и здесь.

При построении определяющих соотношений для монокристалла часто используется формализм теории пластического течения. В последней одним из главных понятий является понятие поверхности текучести. Одним из распространенных вариантов уравнения, определяющего поверхность текучести монокристалла, является соотношение (6.1), которое можно записать в виде:

$$\mathbf{f}(\mathbf{S}) = \mathbf{M} : \mathbf{S} - \left(\pm \tau_0^{(k)}\right) = 0, \ k = \overline{\mathbf{I}, \mathbf{N}} .$$
(6.9)

Отметим, что в последнем соотношении полагается равенство пределов текучести в k-ой системе скольжения при "прямом" и "реверсивном" нагружении. Указанное ограничение может быть легко устранено путем переопределения понятия системы скольжения, когда система скольжения определяется нормалью к плоскости скольжения и "положительным" и "отрицательным" направлениями скольжения в ней краевых дислокаций, т.е. осуществляется удвоение числа систем скольжения:

$$\mathbf{f}(\mathbf{S}) = |\mathbf{M} : \mathbf{S}| - |\boldsymbol{\tau}_0^{(k)}| = 0, \, \mathbf{k} = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{2N}}, \, (6.9')$$

где N – число систем скольжения. Далее под N будет пониматься именно число систем скольжения, равное удвоенному числу кристаллографических систем скольжения.

Полагая неизменным положение кристаллографических осей (возможно, в локальной системе координат, связанной с монокристаллом), нетрудно видеть, что соотношение (6.9) (или (6.9')) представляют собой систему N линейных уравнений относительно компонент девиатора напряжений **S**. Следовательно, в пространстве напряжений соотношения (6.9) (или (6.9')) определяют N гиперплоскостей, или N-гранник, называемый многогранником текучести. Например, для ГЦК-кристаллов поверхность текучести представляет собой 24-гранник.

Нетрудно видеть, что градиент поверхности текучести в пространстве напряжений определяется соотношением:

$$\frac{\partial \mathbf{f(S)}}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{M}^{(k)}, k = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{N}}.$$
(6.10)

Если изображающая точка в пространстве напряжений (ИТН) находится на одной из граней многогранника текучести (т.е. выполняются условия пластического деформирования), для определенности – на грани с номером l, то активной является система скольжения 1 и из сопоставления (6.6) и (6.10) нетрудно видеть, что приращение пластической деформации определяется поверхности текучести. Иначе говоря, в данном градиентом случае выполняется принцип градиентальности, или – ассоциированный закон пластического течения. При расположении ИТН на ребре многогранника текучести приращение девиатора пластической деформации de<sup>p</sup> имеет линейной комбинацией нормалей направление, определяемое к пересекающимся граням. Аналогичным образом определяется направление de<sup>p</sup> при нахождении ИТН в вершине многогранника (направление de<sup>p</sup> лежит внутри конуса, ограниченного нормалями к пересекающимся граням).

Наличие сингулярной поверхности текучести порождает определенные трудности при построении соотношений теории пластичности (аналогичная ситуация возникает, например, при использовании критерии Треска-Сен-Венана в теории пластического течения). В связи с этим целесообразными следует признать попытки замены условий текучести с сингулярностями (вида (6.9)-(6.9')) регулярными (гладкими) условиями. Одна из таких попыток предпринята в работе [7<sup>\*</sup>]. Условия текучести в цитируемой работе представлено в виде:

$$\mathbf{f(S)} = \left(\sum_{k} \left| \mathbf{S} : \mathbf{M}^{(k)} \right|^{q} \right)^{\frac{1}{q}} - \tau_{\mathrm{cr}} = 0, \, 2 \le q \le \infty \,. \tag{6.11}$$

Можно показать, что соотношение (6.11) определяет гладкую, ограниченную и строго выпуклую поверхность в пространстве напряжений. Отметим, что условие (6.11) может быть легко модифицировано для случая различных критических напряжений на плоскостях скольжения. Можно показать, что при  $q \rightarrow \infty$  поверхность, описываемая соотношением (6.11), стремится к поверхности многогранника (6.9) (при  $\tau_0^{(k)} = \tau_{cr} \quad \forall k$ ), оставаясь внутри многогранника. В отличие от многогранника поверхность (6.11) не имеет особенностей, что позволяет достаточно просто записать соотношения ассоциированного закона пластического течения.

86

#### О теориях пластичности для поликристаллов

Определенные успехи, достигнутые при построении моделей монокристалла, побудили исследователей к использованию последних для описания поведения поликристаллов. Как и ранее, ограничимся случаем малых деформаций.

Основной особенностью поликристаллов в сравнении с монокристаллами различно первых множества ориентированных является наличие В кристаллических микрообъектов (с относительно правильным строением решетки) кристаллической И существование границ между ЭТИМИ микрообъектами; в дальнейшем указанные области для краткости будем называть зернами.

Границы зерен играют, по крайней мере, двоякую роль. Во-первых, они представляют собой специфические области дефектной структуры с характерной толщиной 0,1-0,6 мкм и плотностью дислокаций в несколько раз выше, чем в зернах. В связи с этим границы зерен могут выступать и как специфический механизм неупругого деформирования (так называемого зернограничного скольжения); возможно, более существенное влияние на процесс неупругого деформирования они оказывают как генераторы дислокаций и как "устройства", реализующие аккомодационные механизмы. Во-вторых, на границах зерен реализуются ограничения, накладываемые пластическое деформирование зерна различно ориентированными на соседними зернами. В большинстве работ по ФТП учитывается именно второй аспект влияния границ, связанный со стеснением пластических деформаций за счет разориентировки соседних зерен.

Одной из первых попыток построения одномерной модели поликристалла на основе рассмотрения совокупности монокристаллов была модель Закса. В ориентированными модели зерна полагались хаотически, данной взаимодействием между зернами пренебрегалось. Одноосные напряжения считались достаточными для начала текучести в каждом зерне. Принималось, суммарное усилие (при одноосном нагружении) в произвольном что поперечном сечении поликристалла равно сумме усилий в направлении нагружения, приложенных в соответствующих сечениях каждого зерна. Расчеты по модели Закса дают значение макроскопического напряжения текучести, равное 2,2<sub>т</sub>с, где <sub>с</sub> – критическое напряжение сдвига в монокристалле.

К основным недостаткам модели Закса относятся невыполнение условий равновесия и совместности деформаций соседних зерен. Модель Закса может быть использована для определения предела текучести при одноосном нагружении, для построения кривой  $\sigma$ - $\epsilon$  требуются дополнительные предположения.

Вероятно, первый достаточно реалистичной попыткой установления связи σ-є при одноосном нагружении поликристалла на основе соотношений для монокристалла можно признать модель Тейлора (1938 г.). При ее построении Тейлором использованы следующие гипотезы:

88

- а) Поликристалл представляет собой агрегат из большого числа хаотично ориентированных зерен.
- b) Поведение каждого из зерен описывается жесткопластической моделью; деформации зерен осуществляются только кристаллографическим сдвигом по известным для данного материала кристаллографическим системам (скольжения); упрочнение одинаково во всех плоскостях скольжения и определяются свойствами монокристалла.
- с) Границы зерен имеют нулевую толщину, не осуществляют вклада в механизмы неупругого деформирования.
- d) Деформации полагаются однородными в пределах макроскопического представительного объема, т.е.  $\varepsilon^{p(k)} = \langle \varepsilon^{p} \rangle = \varepsilon$ . Поскольку деформации осуществляются сдвигом, в этом случае отсутствует изменение объема, т.е.  $\varepsilon^{p(k)} = \varepsilon^{p(k)} = \varepsilon^{p(k)} = \varepsilon^{p(k)} = \varepsilon^{p(k)} = \varepsilon^{p(k)}$

В рассматриваемых типах кристаллов число систем скольжения превышает число независимых компонент девиатора деформаций, что обусловливает неоднозначность определения сдвигов ПО кристаллографическим плоскостям по заданному девиатору деформаций. Указанное обстоятельство является одной из существенных трудностей построения физических теорий пластичности. Для ее преодоления Тейлором предложен эвристический принцип, суть которого состоит в следующем. что любая деформация (или приращение Полагается. деформации) осуществляется сдвигом по не более чем пяти независимым системам скольжения, определенным из условия минимальности суммарного сдвига. Представляющий по существу гипотезу, данный принцип минимума сдвига основывался на наблюдениях за поведением одиночных кристаллов.

Обозначим через  $d\gamma_i^{(k)}$  приращение сдвига в k-м зерне по i-ой системе скольжения. Как отмечено выше, критические напряжения сдвига одинаковы во всех системах данного зерна и обозначаются как  $\tau_0^{(k)}$ . Тогда элементарная работа  $dA^{(k)}$ , произведенная в k-м зерне объемом V<sup>(k)</sup>, определяется соотношением:

$$dA^{(k)} = V^{(k)} \tau_0^{(k)} \sum_{i=1}^{n_k} d\gamma_i^{(k)}, \qquad (6.12)$$

где n<sub>k</sub> – число активных систем скольжения в данном k-м зерне в рассматриваемый момент нагружения.

Элементарная работа dA, производимая на сдвигах по активным системам скольжения в агрегате из N монокристаллов, определяется следующим соотношением:

$$dA = \sum_{k=1}^{N} V^{(k)} \tau_0^{(k)} \sum_{i=1}^{n_k} d\gamma_i^{(k)} .$$
 (6.13)

Заметим, что в правой части (6.13) суммирование по числу активных систем скольжения осуществляется от 1 до  $n_k$ , т.е. в различных зернах это число может быть различным ( $1 \le n_k \le 5$ ).

В модели Тейлора полагается, что вся подводимая к образцу механическая энергия расходуется на совершение пластической

**деформации**. В случае одноосного нагружения (при действии напряжения  $\sigma_{11}$ ) элементарная работа внешних сил в предположении одноосного макроскопического напряженно-деформированного состояния равна  $(\sum V^{(k)}) \sigma_{11} d\epsilon_{11} \equiv \sigma_{11} d\epsilon_{11}^{p} (\sum V^{(k)})$ . Тогда, приравнивая работу внешних напряжений и работу внутренних сдвиговых напряжений, получаем:

$$\sigma_{11} d\epsilon_{11} \sum_{k=1}^{N} V^{(k)} = \sum_{k=1}^{N} \left( V^{(k)} \tau_{0}^{(k)} \sum_{i=1}^{n_{k}} d\gamma_{i}^{(k)} \right).$$
(6.14)

Предполагая, что все зерна имеют одинаковый объем, окончательно получаем:

$$\sigma_{11} d\varepsilon_{11} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left( \tau_0^{(k)} \sum_{i=1}^{n_k} d\gamma_i^{(k)} \right).$$
(6.15)

Последнее соотношение позволяет построить кривую одноосного нагружения поликристалла с использованием модели монокристалла. Процедура пошагового построения кривой состоит в следующем:

- Пусть кривая построена для определенной предшествующей деформации ε<sub>11</sub>, т.е. известны напряжения σ<sub>11</sub> во все предшествующие моменты нагружения, накопленные сдвиги, критические напряжения сдвига во всех зернах; ориентация зерен полагается неизменной и известной.
- Задается достаточно малое приращение деформации  $\Delta \varepsilon_{11}$ , являющееся одновременно приращением главной деформации  $\Delta \varepsilon_1 = \Delta \varepsilon_{11}$ ; из условия несжимаемости два других главных значения приращений деформаций  $\Delta \varepsilon_2 = \Delta \varepsilon_3 = -1/2\Delta \varepsilon_1$  (при этом  $\Delta \varepsilon_2 = \Delta \varepsilon_{22}$ ,  $\Delta \varepsilon_3 = \Delta \varepsilon_{33}$ , все остальные компоненты тензора  $\Delta \varepsilon$  равны нулю). Следует подчеркнуть, что главные оси тензоров  $\varepsilon$  и  $\Delta \varepsilon$  совпадают и неизменны. По заданному тензору  $\Delta \varepsilon$  данного шага нагружения в каждом зерне определяются приращения сдвигов по активным системам скольжения, обеспечивающие минимальность приращения суммарного сдвига.
- По накопленным сдвигам (с учетом приращений на рассматриваемом шаге) определяются критические напряжения сдвига в каждом зерне  $\tau_0^{(k)}, k = \overline{1, N},$  после чего легко определяется значение правой части (6.15) и величина  $\sigma_{11}$ .

Тейлор применил описанную процедуру для определения кривой деформирования алюминия (ГЦК-решетка). Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными, что подтверждает приемлемость модели для рассмотрения, по крайней мере, одноосного нагружения.

В то же время, модель Тейлора не лишена недостатков. Вероятно, основным из них является невыполнение условий равновесия на границах зерен. Другим является сложность реализации модели, связанная с необходимостью определения активных систем скольжения и сдвигов в них, доставляющих минимум суммарному сдвигу. Процедура решения данной задачи минимизации оказывается весьма трудоемкой. Следует отметить также неучет в модели Тейлора упругих деформаций. Наконец, представляется достаточно грубым предположение об однородности деформаций в зернах, что не соответствует результатам микроэкспериментов, особенно в случае сложного нагружения. В реальных процессах деформирования

микродеформации неоднородны даже в пределах каждого зерна и субзерна. Неучет данного факта приводит к невозможности описания деформирования по другим модам, например, ротационной.

### Модель Бишопа-Хилла [8<sup>\*</sup>]

В модели используются некоторые положения макроскопической теории пластичности, для полноты изложения ниже напоминаются ее основные понятия и положения. В частности, используется понятие поверхности текучести,  $f(S)=\sigma_s$ ; принимаются соотношения ассоциированного закона течения,  $de^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial S}$ . Полагается, что упругими деформациями можно пренебречь; пластическое деформирование осуществляется без изменения объема,  $d\epsilon^p = de^p$ .

В теории используется также введенный в макроскопической теории пластичности **принцип максимума работы**. Пусть в некоторый момент нагружения действительное напряженное состояние в рассматриваемой частице определяется тензором  $\sigma$  и отвечает пластическому состоянию (т.е.  $\sigma$  изображает положение на поверхности текучести). Данному состоянию отвечает тензор приращения деформаций d $\epsilon$  (d $\epsilon$  = d $\epsilon$ <sup>p</sup> = de<sup>p</sup>), направленный согласно сказанному выше по нормали к поверхности текучести. Далее, пусть  $\sigma^* \neq \sigma$  – напряжение, не нарушающее условие текучести при данном положении и размерах поверхности текучести, т.е.  $\sigma^*$  отвечает точка в пространстве напряжений, лежащая внутри или на поверхности текучести. В силу выпуклости последней угол между ( $\sigma$ - $\sigma^*$ ) и направлением внешней нормали к поверхности текучести (а следовательно – d $\epsilon$ ) должен быть острым, откуда

 $(\sigma - \sigma^*): d\epsilon \ge 0, d\epsilon \ne 0.$  (6.16) В последнем соотношении знак равенства возможен только в случае, если  $\sigma$  и  $\sigma^*$  отличаются гидростатическим давлением. Соотношение (6.16) представляет собой математическую формулировку принципа максимальной работы: из всех возможных напряжений (т.е. не нарушающих условие текучести) действительное напряжение производит максимальную работу на приращении (пластических) деформаций.

Предполагая, что тензоры напряжений  $\sigma$  и  $\sigma^*$  удовлетворяют однородному уравнению равновесия, учитывая, что (6.16) выполняются для произвольной точки тела, нетрудно получить следующее соотношение:

$$\int_{S} \left( \mathbf{T} - \mathbf{T}^{*} \right) \cdot d\mathbf{u} \, dS \ge 0, \qquad (6.17)$$

где **T**, **T**<sup>\*</sup> – соответствующие  $\sigma$ ,  $\sigma$ <sup>\*</sup> поверхностные нагрузки. Заметим, что соотношения (6.16), (6.17) не зависят от наличия или отсутствия упрочнения и анизотропии материи.

В работе Бишопа и Хилла доказывается также обратное (в определенном смысле) утверждение: если для заданного dε напряжения σ доставляют стационарное (или максимальное) значение работе по сравнению со всеми

близкими напряжениями  $\sigma^*$ , не выходящими за пределы поверхности текучести, то существует пластический потенциал, и он совпадает с поверхностью текучести; в случае максимальности работы соответствующая поверхность (изопотенциальная или поверхность текучести) является строго выпуклой.

Для полноты изложения модели Бишопа-Хилла остановимся на всех этапах ее построения, начиная с монокристалла, хотя часть положений не отличается от рассмотренных выше.

### Пластичность монокристалла

Полагается, что пластическое деформирование осуществляется только сдвигом по известным кристаллографическим системам; ориентационные тензоры последних, как и ранее, будут обозначаться как  $\mathbf{M}^{(k)}$ , k=1,...,N. Соответствующий микросдвигам  $d\gamma^{(k)}$  тензор (девиатор) микродеформаций de ( $\mathbf{de} = \mathbf{de}^{p} = \mathbf{d\epsilon}$ ) определяется линейной комбинацией микросдвигов по кристаллографическим системам:  $d\epsilon = \sum_{k} M^{(k)} d\gamma^{(k)}$ , причем тензор  $\mathbf{d\epsilon}$  имеет пять

независимых компонент.

Очевидно, что тензор dɛ однозначно определяется по заданным d $\gamma^{(k)}$ . Однако обратное неверно, причем возможны различные ситуации. Если N<5, в случае произвольной деформации отсутствует комбинация сдвигов, реализующая dɛ. Отметим, что в данном случае невозможна реализация произвольной деформации только за счет скольжения краевых дислокаций, и в рассмотрение необходимо вводить другие моды деформации, например, движение винтовых дислокаций, переползание краевых дислокаций, движение точечных дефектов. В случае N=5, при условии линейной независимости ориентационных тензоров  $\mathbf{M}^{(k)}$ , в разложении  $d_{\varepsilon} = \sum_{k} M^{(k)} d\gamma^{(k)}$  существует

единственное решение для  $d\gamma^{(k)}$ , определяемых по d $\epsilon$ .

В случае, когда N>5, могут быть определены  $C_N^5$  наборов сдвигов, реализующих данную деформацию, однако следует использовать только множества линейно независимых сдвигов. В общем случае могут быть найдены множества шести и более сдвигов по кристаллографическим системам, производящих заданную деформацию. Отметим, что из чисто кинематических (геометрических) соображений установить единственную совокупность сдвигов не удается, и это представляет одну из сложностей физических теорий.

Бишопа-Хилла обычно упрочнение В модели принимается, ЧТО одинаково в активных и неактивных системах скольжения; однако при этом в напряжений активных системах возможно различие критических ПО противоположным направлениям скольжения, т.е. условие текучести имеет вид (6.9'). В оригинальном варианте модели  $[8^*]$  законы упрочнения практически не обсуждаются, поскольку не приводят к изменению структуры теории и ее основных соотношений.

Для монокристалла также формулируется и доказывается принцип максимальности работы. Пусть dє – приращение деформации, реализующееся в монокристалле,  $\sigma$  – тензор напряжений, вызывающий эту деформацию. Пусть имеется другой тензор напряжений  $\sigma^*$ , не нарушающий условие текучести. Через d $\gamma^{(k)}$  обозначим элементарные сдвиги по активным системам скольжения, так что  $d\varepsilon = \sum_{k} M^{(k)} d\gamma^{(k)}$ , причем суммирование в первой части ведется только по номерам активных систем скольжения. На активных системах скольжения должно выполняться условие текучести, т.е.  $\mathbf{M}^{(k)}: \sigma = \tau_0^{(k)}$ . Обозначим  $\tau^{(k)*} = \mathbf{M}^{(k)}: \sigma^*$  – сдвиговое напряжение в k-ой системе скольжения, соответствующее напряжению  $\sigma^*$ . В силу предположения о допустимости  $\sigma^*$  (т.е. ненарушении условия текучести) имеем:

$$\left| \tau^{(k)*} \right| \le \tau_0^{(k)}.$$
 (6.18)

Отметим также, что знаки  $d\gamma^{(k)}$  и  $\tau^{(k)}$  в данном случае всегда одинаковы и положительны (каждое из направлений в плоскости скольжения образует собственную систему скольжения). Тогда нетрудно установить следующее соотношение:

$$d\mathbf{A} - d\mathbf{A}^* = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^* : d\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*\right) : d\boldsymbol{\varepsilon} = \sum \left(\tau_0^{(k)} - \tau^{(k)*}\right) d\boldsymbol{\gamma}^{(k)} \ge 0$$

откуда

$$d\mathbf{A} = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} = \sum \tau_0^{(k)} d\gamma^{(k)} \ge \sum \tau^{(k)} d\gamma^{(k)} = \boldsymbol{\sigma}^* : d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}\mathbf{A}^*.$$
(6.19)

Соотношение (6.19) представляет собой математическую запись принципа максимальной работы для монокристалла.

Отметим, что в физических теориях часто используются понятия геометрически и физически возможных систем сдвигов, или, при векторном представлении  $\gamma$  в  $\Re^n$  – соответствующих векторов сдвига. Вектор сдвига  $\gamma$  называется *геометрически возможным*, если он реализует предписанную пластическую деформацию  $e^p$  (аналогично – для приращений  $d\gamma$  и  $de^p$ ). Вектор  $d\gamma$  называется *физически возможным*, если он реализуем для данного напряженного состояния, т.е. в соответствующих системах скольжения выполняется условие текучести.

Для определения физически и геометрически возможных векторов сдвига dy в теории Бишопа-Хилла используется упомянутый выше принцип минимума сдвига. Пусть d $\epsilon$  – задаваемое приращение деформаций,  $\sigma$  – тензор напряжений, инициирующий эту деформацию активизацией сдвига dy и удовлетворяющий условию текучести. Предположим, что dy<sup>\*</sup> – вектор сдвига, также эквивалентный d $\epsilon$  (т.е. геометрически возможный), однако не обязательно вызываемый некоторым напряжением, удовлетворяющим условию текучести (т.е. не являющийся физически возможным). Заметим, что в силу выполнения условия текучести для тензора  $\sigma$  компоненты  $\tau^{(k)}$  вектора сдвиговых напряжений  $\tau$  в любой k-й системе скольжения не превосходят критического напряжения сдвига  $\tau_0^{(k)}$ . Для геометрически и физически возможного вектора dy в n активных системах скольжения  $\tau^{(k)} = \tau_0^{(k)}$ , в остальных dy<sup>(l)</sup>=0. При этом в активных системах скольжения знаки dy<sup>(k)</sup> и  $\tau^{(k)}$  совпадают и положительны. Для геометрически (но не физически) возможного вектора d $\gamma^*$  в каждой системе скольжения  $|\tau^{(k)}| \leq \tau_0^{(k)}$ , при этом знаки d $\gamma^{(k)}$  и  $\tau^{(k)}$  могут быть произвольными (т.е.  $\tau^{(k)}$  может быть как положительным, так и отрицательным).

С учетом сказанного выше получаем:

$$\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \sum \tau^{(k)} d\boldsymbol{\gamma}^{(k)} = \sum \tau^{(k)} d\boldsymbol{\gamma}^{*(k)},$$
  
$$\sum \tau^{(k)} d\boldsymbol{\gamma}^{(k)} = \sum \tau^{(k)}_{o} |d\boldsymbol{\gamma}^{(k)}|, \quad \sum \tau^{(k)} d\boldsymbol{\gamma}^{*(k)} \leq \sum |\tau^{(k)}| |d\boldsymbol{\gamma}^{*(k)}| \leq \sum \tau^{(k)}_{o} |d\boldsymbol{\gamma}^{*(k)}|.$$

Следовательно,

$$\sum \tau_0^{(k)} \left| d\gamma^{(k)} \right| \leq \sum \tau_0^{(k)} \left| d\gamma^{*(k)} \right|.$$
(6.20)

Последнее соотношение представляет принцип минимума сдвига Тейлора, расширенный на случай неоднородного упрочнения. Полагая, что упрочнение одинаково во всех системах скольжения, из (6.20) получаем:

$$\sum \left| d\gamma^{(k)} \right| \le \sum \left| d\gamma^{*(k)} \right|, \tag{6.21}$$

представляющее собой математическую запись **принципа минимума сдвига Тейлора**: сумма абсолютных значений приращений физически и геометрически возможных сдвигов не превосходит суммы абсолютных значений приращений геометрически возможных сдвигов. Из доказательства следует также, что если существует более одной системы физически и геометрически возможных сдвигов, то сумма абсолютных значений приращений сдвигов во всех таких системах будет одинаковой.

Заметим, что в отличие от предположения Тейлора о том, что деформация реализуется сдвигом по не более чем пяти системам скольжения, здесь такого предположения не вводится, число активных систем скольжения ограничивается только числом кристаллографических систем.

Нетрудно видеть, что принцип минимума сдвига не позволяет определить единственный набор систем скольжения, он обеспечивает только "отбраковку" векторов сдвига, не являющихся физически возможными.

#### Поликристаллический агрегат

Физическая теория пластичности в различных ее модификациях, несмотря на рассмотрение в явной форме описания деформирования на микроуровне, в значительной мере опирается на макроэксперименты. В частности, из макроэкспериментов определяются физические параметры (или часть из них), фигурирующие в описании микродеформирования; правильность основных положений ФТП проверяется, в конечном счете, также в макроопытах. В связи с вышесказанным в замкнутой ФТП должны присутствовать подходы и соотношения, позволяющие связывать микро- и макроэксперименты.

При проведении экспериментов и интерпретации результатов в рассмотрение входят напряжения и деформации, осредненные по большому числу микроэлементов (зерен). Понятно, что интерпретация результатов макроэкспериментов с позиций ФТП существенным образом связана с принимаемой процедурой осреднения. Ниже рассматриваются некоторые теории Бишопа-Хилла аспекты принятого В подхода К осреднению, опирающегося на две основные гипотезы 0 связи микро-И макроэкспериментов.

а) Измерения макропеременных осуществляются на таких объемах, что **распределение ориентаций и упрочнения зерен в различных объемах отличаются несущественно**. Иначе говоря, образец полагается однородным в макросмысле. Следует отметить, что это не исключает из рассмотрения анизотропные материалы, поскольку распределение ориентаций не обязательно равномерное, могут реализовываться случаи преимущественной ориентации в определенных направлениях.

В дальнейшем, наименьший объем, обладающий подобными свойствами, будет называться «единичным» кубом (имеющий в действительности форму куба и единичные ребра).

b) Отсутствует корреляция между микроскопическими напряжениями и положением на плоскости произвольного сечения «единичной» площади. Данное предположение позволяет представить результирующую напряжений на такой единичной площади как одиночную силу, приложенную в центре площадки. Выбирая далее декартову ортогональную систему координат, по определенной компонентам таким образом силы нетрудно получить компоненты тензора макронапряжений, причем последний будет симметричным.

В случае, если корреляция между микронапряжениями и положением в единичном сечении существует, тензор макронапряжений не обязательно симметричный, и в этом случае уравнение баланса момента количества движения отличается от классического. Заметим, что подобное определение напряжений возможно на различных масштабных уровнях, включая используемый в некоторых вариантах ФТП так называемый "атомный" (представительный объем атомного уровня можно определить как объем совершенной кристаллической решетки, содержащей 10<sup>3</sup>-10<sup>6</sup> атомов).

Рассмотрим связь кинематических характеристик микро- и макроуровней, опираясь на геометрический смысл компонент тензора малых деформаций. Будем обозначать через **u**, **ɛ**, **σ** микроскопические перемещения, деформации и напряжения, соответствующие макропеременные будем обозначать аналогичными буквами с введением знака осреднения <->. Тогда приращение тензора малых деформаций для «единичного куба» можно определить следующим образом:

$$\langle d\varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \int_{S} (n \, du + du \, n) \, dS,$$
 (6.22)

где **n** – единичная внешняя нормаль к поверхности «единичного куба»,

S – его поверхность.

В случае, если микроскопические перемещения принимаются непрерывными функциями пространственных координат, из (6.22) следует:

$$\langle d\boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{2} \int_{V} \left( \nabla d\boldsymbol{u} + \nabla d\boldsymbol{u}^{T} \right) dV = \int_{V} d\boldsymbol{\epsilon} dV,$$
 (6.23)

где интегрирование ведется по объему единичного куба. Отметим, что в случае произвольных («не нормализованных») размеров представительного объема правые части (6.22) и (6.23) следует делить соответственно на S и V (будем полагать при этом, что представительный макрообъем имеет форму куба).

Следует подчеркнуть, что макропараметры представляют собой некоторые осредненные величины по подобъемам представительных микрообъемов. Иначе говоря, и на микроуровне осуществлен переход к континууму.

Элементарная работа, совершаемая микронапряжениями в элементарном кубе, определяется соотношением:

$$dA = \int_{V} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{S} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{u} dS, \qquad (6.24)$$

вторая часть справедлива в случае непрерывности полей микроперемещений и выполнении однородного условия равновесия. Заметим, что компоненты микронапряжений не обязательно должны быть непрерывными на произвольных поверхностях (например, границах зерен), для выполнения условий равновесия должны быть непрерывны только результирующие распределенные нагрузки на таких поверхностях.

В дополнение к предыдущим принимается гипотеза об отсутствии корреляции между распределением любых компонент микронапряжений и любыми компонентами микроперемещений в любом сечении единичной площади (в единичном кубе).

Отсутствие корреляции может быть косвенно подтверждено тем фактом, что резкие увеличения значений напряжений соответствуют местам расположения барьеров, стыкам зерен и т.д., тогда как резкие изменения микроперемещений реализуются на кристаллографических системах, свободных от подобных препятствий.

Остановимся на этой гипотезе несколько подробнее. Напомним, что для произвольных осредненных параметров A, B обычно принимается следующее разложение:

$$A = \overline{A} + A', \quad B = \overline{B} + B',$$

где  $\overline{A}, \overline{B}$  – осредненные (в некотором смысле) величины A и B; A', B' – осциллирующие части, при этом обычно принимается, что  $\overline{A}' = 0, \overline{B}' = 0$  (или  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{\overline{B}} = \overline{B}$ ). Отсутствие корреляции между величинами A и B означает, что для осциллирующих составляющих можно принять следующее равенство:  $\overline{A'B'} = 0$ .

В данном случае осреднение производится по единичной площади произвольного сечения:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \int_{S} \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{dS}, \quad \langle \mathrm{d} \mathbf{u} \rangle = \int_{S} \mathrm{d} \mathbf{u} \, \mathrm{dS} \,.$$
 (6.25)

Тогда в соответствие с вышеприведенным соотношением получаем:

$$\int \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}\mathbf{u} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \left(\int_{\mathbf{S}} \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}\mathbf{S}\right) \left(\int_{\mathbf{S}} \mathrm{d}\mathbf{u} \, \mathrm{d}\mathbf{S}\right),\tag{6.26}$$

или в компонентах ( $\forall i, j, k = \overline{1,3}$ ):

$$\int \sigma_{ij} du_k dS = \left( \int_S \sigma_{ij} dS \right) \left( \int_S du_k dS \right) \qquad (6.26')$$

В частности, последнее соотношение элементарно выполняется, когда напряжения или деформации однородны в рассматриваемом единичном кубе (т.е. в условиях справедливости гипотез Рейсса или Фойгта). Заметим, что (6.26)-(6.26') получены для произвольной площадки единичной площади. Переходя в (6.26') к интегрированию по граням единичного куба, полагая j = k и домножая левую и правую части (6.26') на  $n_i$ , суммируя по повторяющимся индексам, приходим к соотношению:

$$\int_{S_p} n_i \sigma_{ij} du_j dS = \left( \int_{S_p} \sigma_{ij} dS \right) \left( \int_{S_p} n_i du_j dS \right), \qquad (6.27a)$$

или

$$\int_{S_p} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{u} \, d\mathbf{S} = \int_{S_p} \boldsymbol{\sigma} \, d\mathbf{S} : \int_{S_p} \mathbf{n} \, d\mathbf{u} \, d\mathbf{S} \,, \tag{6.276}$$

где р – номер грани единичного куба.

Расположим куб ребрами вдоль осей декартовой ортогональной системы координат; номера граней в (6.27а) и индексы для внешних нормалей вдоль осей x<sub>p</sub> и в противоположном направлении обозначим через р и (-p) обязательных соответственно. В силу условий равновесия, для представительного макрообъема, компоненты напряжений  $\langle \sigma \rangle_{pq} = \langle \sigma \rangle_{(-p)q}$ ; кроме того,  $\int \sigma_{pq} dS = \langle \sigma \rangle_{pq}$ . Второй сомножитель правой части (6.27а) отличен от нуля только для i = p ( $n_{p+1} = n_{p+2} = 0$ ),  $\int_{S_n} n_p du_j dS + \int_{S_{(-p)}} n_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS = \int_{S} n_p du_j dS$ , где  $S - S_{(-p)} du_j dS$ , где S– поверхность единичного куба. Таким образом, для членов с номерами р и (-р), вынося в качестве общего множителя <**о**><sub>ро</sub> получаем, что правая часть (6.27а) равна:  $\langle \sigma \rangle_{pq} \left( \int_{a} n_p du_q dS \right)$  для каждого фиксированного р и пробегающего значения от 1 до 3 индекса q, по которому осуществляется суммирование. Просуммируем последнее соотношение по р:

$$\sum_{p} \left[ \left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle_{pq} \left( \int_{S} n_{p} \, du_{q} \, dS \right) \right] = \left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle_{pq} \mathbf{k}^{p} \mathbf{k}^{q} : \left( \int_{S} n_{m} \, du_{1} \, dS \right) \mathbf{k}^{1} \mathbf{k}^{m} = \left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle : \int_{S} n \, du \, dS \,. \quad (6.27B)$$

Справедливость данного соотношения проверяется простыми вычислениями с учетом свойства  $n_p = 1$ ,  $n_{p+1} = n_{p+2} = 0$  на  $S_p$ .

Заметим, что без изменения результата подынтегральное выражение второго интеграла правой части (6.27в) можно симметризовать. Тогда, в соответствии с (6.22), имеем:

$$\int \mathbf{n} \, \mathrm{d}\mathbf{u} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \left\langle \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle_{\cdot} \tag{6.28}$$

Тогда из (6.24) с учетом (6.27в) и (6.28) получаем:

$$d\mathbf{A} = \int_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} \, d\mathbf{V} = \left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle : \left\langle d\boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle. \tag{6.29}$$

С использованием последнего соотношения может быть доказан **принцип максимума работы для пластического поликристалла** на основе принципа максимума для монокристалла, не прибегая при этом к понятию поверхности текучести поликристалла. Действительно, пусть  $\sigma^*$  – микронапряжения, не нарушающие условия текучести и удовлетворяющие однородному условию равновесия,  $<\sigma^* >$  – осредненные напряжения. Тогда в соответствии с (6.29) и (6.19) имеем:

$$(\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}^* \rangle): \langle d\boldsymbol{\epsilon} \rangle = \int_{V} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*): d\boldsymbol{\epsilon} dV \ge 0$$
, (6.30)

что и требовалось показать.

Аналогично доказывается принцип минимума сдвига для поликристалла. Пусть du и du<sup>\*</sup> – непрерывные с непрерывными первыми производными поля перемещений, удовлетворяющие условию сохранения объема ( $\nabla \cdot du = \nabla \cdot du^* = 0$ ), имеющие одинаковые значения на поверхности единичного куба. Полагаем, что du ассоциировано с равномерным распределением микронапряжений  $\sigma$ , удовлетворяющих условию текучести. Тогда:

$$\int_{V} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{V} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{*} dV, \qquad (6.31)$$

ИЛИ

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle d\boldsymbol{\epsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle d\boldsymbol{\epsilon}^* \rangle.$$
 (6.32)

Указанные соотношения легко получается с использованием (6.27в)-(6.28) с учетом равенства du и du<sup>\*</sup> на поверхности единичного куба. При этом справедливы следующие равенства:

$$\int_{V} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \int_{V} \left( \sum_{k} \tau^{(k)} \, d\gamma^{(k)} \right) dV = \int_{V} \sum_{k} \left( \tau_{0}^{(k)} \, d\gamma^{(k)} \right) dV,$$

$$\int_{V} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{*} \, dV = \iint_{V} \left( \sum_{k} \tau^{(k)} \, d\gamma^{(k)^{*}} \right) dV.$$
(6.33)

В силу того, что  $d\gamma^{(k)*}$  – геометрически возможны, но не обязательно физически возможны, в (6.33<sub>2</sub>) знаки  $\tau^{(k)}$  и  $d\gamma^{(k)*}$  могут быть различны,  $|\tau^{(k)}| \le \tau_0^{(k)}$ , откуда получаем:

$$\sum_{k} \tau^{(k)} d\gamma^{(k)*} \leq \sum_{k} \left| \tau^{(k)} \right\| d\gamma^{(k)*} \left| \leq \sum_{k} \tau^{(k)}_{0} \left| d\gamma^{(k)*} \right|.$$
(\*)

В (6.33<sub>1</sub>) знаки  $\tau^{(k)}$  и  $d\gamma^{(k)}$  совпадают и положительны, на активных площадках  $\tau^{(k)} = \tau_0^{(k)}$ , откуда следует:

$$\sum_{k} \tau^{(k)} \, d\gamma^{(k)} = \sum_{k} \tau^{(k)}_{0} \Big| d\gamma^{(k)} \Big| \, .$$

Тогда получаем окончательно:

$$\left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle : \left\langle d\boldsymbol{\epsilon} \right\rangle = \int_{V} \sum_{k} \left( \tau_{0}^{(k)} \right) \left| d\boldsymbol{\gamma}^{(k)} \right| dV \leq \int_{V} \left( \sum_{k} \tau_{0}^{(k)} \left| d\boldsymbol{\gamma}^{(k)*} \right| \right) dV.$$
(6.34)

Полагая критические напряжения сдвига одинаковыми по агрегату, получаем принцип минимума сдвига для поликристалла:

$$\int_{V} \sum_{k} \left| d\gamma^{(k)} \right| dV \leq \int_{V} \sum_{k} \left| d\gamma^{(k)*} \right| dV.$$
(6.35)

Комбинируя (6.30) и (6.34), приходим к следующему соотношению:

$$\left\langle \boldsymbol{\sigma}^{*} \right\rangle : \left\langle d\boldsymbol{\epsilon} \right\rangle \leq \left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle : \left\langle d\boldsymbol{\epsilon} \right\rangle \leq \int_{V} \sum_{k} \left( \tau_{0}^{(k)} \left| d\boldsymbol{\gamma}^{(k)*} \right| \right) dV.$$
 (6.36)

Кроме того, справедливо неравенство:

$$\langle \mathbf{\sigma} \rangle : \langle d \boldsymbol{\epsilon}^* \rangle \leq \int_{V} \sum_{k} \tau_0^{(k)} | d \gamma^{(k)*} | d V ,$$
 (6.37)

где  $d\epsilon^*$  соответствует некоторому произвольному перемещений  $du^*$ . Следует отметить, что принципы максимума работы и минимума сдвига являются двойственными (см., например,  $[7^*]$ ), и в этом смысле эквивалентны друг другу, один следует из другого.

Как следует из последних результатов, принцип максимума работы справедлив для агрегата из монокристаллических зерен в предположении, что деформирование в каждом из них осуществляется сдвигом по определенным системам скольжения. Тогда из ранее сформулированного (без доказательства) утверждения следует, что может быть построен пластический потенциал, совпадающий с функцией текучести. Но тем самым решается в принципе вопрос об установлении определяющих соотношений в виде принципа градиентальности. Открытым остается только вопрос о величине скалярного множителя в законе градиентальности.

Построение функции текучести связано с определенными сложностями. Остановимся здесь на оценках для частного случая изотропии в ориентации зерен и отсутствия эффекта Баушингера. В этом случае можно показать, что поверхность текучести располагается между двумя цилиндрическими поверхностями. Отметим, что в силу независимости условия текучести от части достаточно определить направляющую шаровой цилиндра на девиаторной плоскости, для чего в каждом направлении в этой плоскости определить расстояние «начала координат»  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ следует ОТ (OT гидростатической оси, равнонаклоненной к главным осям тензора напряжений) до точки начала текучести.

Предположим вначале, что напряженное состояние в рассматриваемом агрегате однородно,  $\langle \sigma \rangle = \sigma$ ,  $\langle S \rangle = S$  (при этом совместность деформаций, вообще говоря, может нарушаться). Введем направляющий тензор  $W = \langle S \rangle / |\langle S \rangle| = (\langle S \rangle :\langle S \rangle)^{1/2}$ . Для каждого из заданных направлений будем выбирать «допустимые», «пробные» микронапряжения  $S^*$  таким образом, что они приводят к текучести только в одной системе скольжения в **«слабейшем» зерне агрегата**. Допустимые напряжения для заданного направления определим в виде  $S^* = \lambda^* r$ , тем самым сводя задачу к определению скалярного множителя  $\lambda^*$ . При этом в силу принятого предположения  $\langle S^* \rangle = S^*$ . Тогда из (6.30) имеем:

98

$$\langle \mathbf{S} \rangle : \langle d\mathbf{\epsilon} \rangle \ge \langle \mathbf{S}^* \rangle : \langle d\mathbf{\epsilon} \rangle \Longrightarrow$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle : \langle d\mathbf{\epsilon} \rangle \ge \lambda^* \frac{1}{|\langle \mathbf{S} \rangle|} \langle \mathbf{S} \rangle : \langle d\mathbf{\epsilon} \rangle,$$

$$(6.38)$$

откуда получаем:

$$|\langle \mathbf{S} \rangle| \ge \lambda^*,$$
 (6.39)

т.е. для каждого из направлений **r** модуль действительных напряжений не меньше величины  $\lambda^*$ , определяемой критическим напряжением сдвига на рассматриваемом этапе нагружения (напомним, что критические напряжения полагаются здесь одинаковыми во всех системах скольжения).

Отметим, что, вообще говоря,  $\lambda^*$  может зависеть от направления в девиаторной плоскости. В этом случае следует определить наименьшее  $\lambda^*$  для rи круговой цилиндр можно определить С направляющей всех  $|<S>| = \lambda^* = \text{const}$ , ограничивающий «изнутри» поверхность текучести. Однако в силу одинаковых значений т<sub>с</sub> во всех системах скольжения и равномерного закона распределения ориентации зерен можно с большой степенью достоверности предположить, что  $\lambda^*$  не зависит от направляющего тензора **r**. В последнее время появилось строгое доказательство того факта, что в модели Бишопа-Хилла величина модуля девиатора напряжений, соответствующая началу текучести, не зависит от направления r.

Рассмотрим определение поверхности текучести в предположении однородного распределения деформаций (модель Фойгта):  $d\epsilon = <d\epsilon>= d\epsilon^{(i)}$  $\forall i=1..N$ . Как и ранее, полагается  $d\epsilon = de = de^{p}$ . Для произвольного напряжения <S> направляющий тензор обозначается как **r**,  $\mathbf{r} = <S>/|<S>|$ . Выбрав произвольное направление **r** на девиаторной плоскости, рассмотрим «пробные» деформации  $d\epsilon^*$ , соответствующие активному нагружению, т.е.  $<S>:<d\epsilon^*>0$ . Пусть  $d\gamma^{(i)*}$  – векторы сдвига в i-м зерне, эквивалентные  $d\epsilon^{(i)*} = d\epsilon^*$ , т.е.  $d\gamma^{(k)*}$  – геометрически возможные векторы сдвига (различные, вообще говоря, в разных зернах). Введем величину  $\mu^*$  следующим соотношением:

$$\mu^{*} = \frac{\int \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{0}^{(k)} \left| d\gamma^{(k)*} \right| \right) dV}{\left(\mathbf{r} : \left\langle d\boldsymbol{\varepsilon}^{*} \right\rangle \right)}, \qquad (6.40)$$

где зависимость от зерен входит через координаты, от которых в общем случае зависят  $\tau_0^{(k)}$  и  $d\gamma^{(k)*}$ ; интегрирование осуществляется по объему единичного куба. В соответствии с (6.37) имеем:

$$\left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle : \left\langle d\boldsymbol{\epsilon}^* \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{S} \right\rangle : \left\langle d\boldsymbol{\epsilon}^* \right\rangle = \left| \left\langle \boldsymbol{S} \right\rangle \right| \boldsymbol{r} : \left\langle d\boldsymbol{\epsilon}^* \right\rangle \le \int_{V} \sum_{k=1}^{n} \tau_0^{(k)} \left| d\boldsymbol{\gamma}^{(k)*} \right| d\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\mu}^* \boldsymbol{r} : \left\langle d\boldsymbol{\epsilon}^* \right\rangle,$$

откуда следует:

 $|\langle \mathbf{S} \rangle| \le \mu^*. \tag{6.41}$ 

Для фиксированного направляющего тензора **r** при произвольном выборе  $d\epsilon^{\hat{r}}$  минимальное значение числителя  $\mu^*$  в силу (6.20) реализуется на физически допустимых полях сдвигов для каждой ориентации, причем зерна полагаются

свободными (т.е. рассматривается совокупность N одиночных кристаллов, имеющих одинаковую деформацию). Полагая далее, что  $d\gamma^{(i)*}$  – геометрически и физически допустимые векторы сдвига в i-х зернах,  $\sigma^{(i)*}$  – напряжения, обеспечивающие эти сдвиги в i-х зернах, получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} \tau_{0}^{(k)} \left| d\gamma^{(k)^{*}} \right| = \sum_{k=1}^{n} \tau_{0}^{(k)} d\gamma^{(k)^{*}} = \boldsymbol{\sigma}^{*} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{*} = \boldsymbol{\sigma}^{*} : \left\langle d\boldsymbol{\varepsilon}^{*} \right\rangle,$$

последнее соотношение справедливо для каждого отдельного кристалла (зерна) и обеспечивает минимальное значение числителю (6.40) на множестве геометрически возможных сдвигов. Суммируя по всем зернам, приходим к соотношению:

$$\mu^{*} = \frac{\int_{V} \left( \sum_{k=1}^{n} \tau_{0}^{(k)} d\gamma^{(k)^{*}} \right) dV}{\left( \mathbf{r} : \left\langle d\boldsymbol{\epsilon}^{*} \right\rangle \right)} = \frac{\left( \left\langle d\boldsymbol{\epsilon}^{*} \right\rangle : \int_{V} \boldsymbol{\sigma}^{*} dV \right)}{\left( \mathbf{r} : \left\langle d\boldsymbol{\epsilon}^{*} \right\rangle \right)}.$$
(6.42)

Учитывая, что искомая ограничивающая поверхность текучести является круговым цилиндром, и учитывая принцип градиентальности, тензор приращений деформаций следует направить вдоль девиатора действительных напряжений, т.е.  $< d\epsilon^* > = d\epsilon^* r$ . Тогда из (6.42) следует (с учетом r:r=1):

$$\mu^* = \mathbf{r} : \int_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\sigma}^* \, d\mathbf{V} = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{r} : \boldsymbol{\sigma}^* \, d\mathbf{V} \,. \tag{6.43}$$

Таким образом, радиус направляющей, ограничивающей поверхности текучести  $\mu^*$  определяется как работа, которая должна быть произведена над всеми зернами однородной ориентации, на которые расщепляется единичный куб, и каждая из которых по отдельности испытывает деформации **r**.

Действительная поверхность текучести, таким образом, определяется неравенствами:

$$\lambda^* \le |\le \mathbf{S}^>| \le \mu^*. \tag{6.44}$$

В случае, если  $\lambda^*$  и  $\mu^*$  достаточно близки, в качестве действительной поверхности можно принять любую из ограничивающих,  $\langle S \rangle = \lambda^*$  или  $|\langle S \rangle| = \mu^*$ . Однако в общем случае для применения теории Бишопа-Хилла к решению конкретных задач теории пластичности требуется построение поверхности текучести, которое замыкает процедуру установления определяющих соотношений. Действительно, в этом случае достаточно воспользоваться ассоциированным законом течения. В связи с вышесказанным представляется целесообразным остановиться более детально на процедуре построения функции текучести монокристалла.

Здесь будут использованы упомянутые выше свойства некоррелированности полей микронапряжений и микродеформаций.

Ранее (см. уравнение (6.29)) показано, что для микронапряжений  $\sigma$ , удовлетворяющих однородному уравнению равновесия (в дальнейшем для краткости такие напряжения будем называть равновесными) и произвольного тензора микродеформаций d $\epsilon$  в предположении существования поля перемещений du, такого, что d $\epsilon$  =  $\frac{1}{2}$  ( $\nabla du + \nabla du^T$ ), и отсутствия корреляции между  $\sigma$  и du на любой единичной площадке справедливо соотношение:

$$\int_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{V} = \left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle : \left\langle d\boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle$$

Интегрирование в последнем соотношении ведется по объему единичного куба. Накладывая аналогичные ограничения на тензор  $\langle d\epsilon \rangle$ , можно записать следующие соотношения:

$$\int_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\sigma} : \langle \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \rangle \mathbf{d}\mathbf{V} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle (\langle \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \rangle) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \qquad (6.45)$$

где тензор напряжений  $\sigma$  – тот же самый, т.е. равновесный.

Представим теперь агрегат, состоящий из отдельных свободных зерен с присущими каждому из них однородными ориентациями и упрочнением, которые они имели в поликристалле. Пусть  $\sigma^*$  – микронапряжения, которые в каждом из свободных зерен производят деформацию <d $\epsilon$ >, одинаковую для всех зерен. Понятно, что в общем случае (произвольной ориентации и упрочнения зерен) напряжения  $\sigma^*$  не являются равновесными и отличаются от зерна к зерну. В то же время напряжения  $\sigma^*$  ассоциированы с деформациями <d $\epsilon$ > в каждом зерне. Тогда согласно принципу максимальной работы для каждого монокристалла можно записать:

$$(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}): \langle d\boldsymbol{\epsilon} \rangle \ge 0, \qquad (6.46)$$

где **о** – равновесные микронапряжения, действующие в поликристалле и являющиеся допустимыми (действительные напряжения не нарушают условия текучести).

Интегрируя (6.46) по объему единичного куба, учитывая (6.45) и возможность вынесения из-под знака интеграла осредненных величин, получаем:

$$\int_{V} \boldsymbol{\sigma} : \langle d\boldsymbol{\epsilon} \rangle dV = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle d\boldsymbol{\epsilon} \rangle \leq \langle d\boldsymbol{\epsilon} \rangle : \int_{V} \boldsymbol{\sigma}^* dV.$$
(6.47)

С другой стороны, действительные равновесные микронапряжения  $\sigma$  ассоциированы с тензором приращений деформаций dɛ; тензор микронапряжений  $\sigma^*$  можно использовать в качестве допустимого, поскольку он также не нарушает условия текучести. Следовательно, для каждого из зерен справедливо неравенство принципа максимальной работы, записанное в форме:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*\right): \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \ge 0 \,. \tag{6.48}$$

Интегрируя последнее соотношение, с учетом (6.29) получаем:

$$\int_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\sigma} : \langle d\boldsymbol{\varepsilon} \rangle d\mathbf{V} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle d\boldsymbol{\varepsilon} \rangle \ge \int_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\sigma}^* : d\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{V} .$$
 (6.49)

Полагая, что отсутствует корреляция между полями  $\sigma^*$  и d $\epsilon$  в объеме единичного куба, правую часть (6.49) можно преобразовать следующим образом:

$$\int_{V} \boldsymbol{\sigma}^{*} : \langle d\boldsymbol{\varepsilon} \rangle dV = \int_{V} \boldsymbol{\sigma}^{*} dV : \int_{V} d\boldsymbol{\varepsilon} dV = \left( \int_{V} \boldsymbol{\sigma}^{*} dV \right) : \langle d\boldsymbol{\varepsilon} \rangle .$$
(6.50)

Напомним, что соотношение  $\langle d\epsilon \rangle = \int_{V} d\epsilon \, dV$  справедливо в предположении непрерывности и гладкости соответствующих полей перемещений **du**. Следовательно, из (6.49) и (6.50) вытекает:

$$\langle \mathbf{\sigma} \rangle : \langle d\mathbf{\epsilon} \rangle \ge \langle d\mathbf{\epsilon} \rangle : \int_{V} \mathbf{\sigma}^* \, dV \,.$$
 (6.51)

Наконец, комбинируя (6.47) и (6.51), получаем соотношение:

$$\langle \mathbf{\sigma} \rangle : \langle d\mathbf{\epsilon} \rangle = \langle d\mathbf{\epsilon} \rangle : \int_{V} \mathbf{\sigma}^* \, dV , \qquad (6.52)$$

являющееся основным для построения функции текучести поликристалла. Соотношение (6.52) представляет собой математическое выражение теоремы, сформулированной Бишопом и Хиллом в работе [9<sup>\*</sup>]:

Действительная работа, производимая над поликристаллическим агрегатом, равна работе, которую необходимо совершить над отдельными зернами, составляющими агрегат, чтобы все зерна испытали микродеформации, равные макроскопической деформации поликристаллического представительного объема.

Кратко рассмотрим процедуру построения поверхности текучести, не вдаваясь в детали ее установления для конкретных типов поликристаллических агрегатов.

Построение поверхности текучести осуществляется перебором всех возможных направлений приращений пластических деформаций <de>. Для заданного <dɛ>, рассматриваемого любого как свободный вектор в пространстве напряжений, для отдельных зерен определяются геометрически возможные векторы сдвига. Полагая известными к данному моменту деформирования накопленные сдвиги, а следовательно — критические напряжения сдвига в системах скольжения, для каждого из зерен определяются напряжения  $\sigma^*$ , доставляющие максимальные значения работе в каждом зерне на микродеформациях, равных  $\langle d\epsilon \rangle$ . По существу,  $\sigma^*$  является решением задачи оптимизации  $\sigma^*$ :  $< d\epsilon > \rightarrow$  max при ограничениях  $|\sigma^* : \mathbf{M}^{(k)}| \le \tau_0^k$  для каждого зерна. В силу линейности целевой функции и ограничений для установления  $\sigma^*$ достаточно «перебрать» вершины многогранника поверхности текучести для каждого из зерен и выбрать из них значение  $\sigma^*$ , доставляющее максимум элементарной работе.

Отметим, что хотя для построения поверхности текучести в данный момент нагружения не требуется определять приращения сдвигов в системах скольжения, однако для установления критических напряжений сдвига на следующем шаге нагружения необходимо иметь информацию о накопленных сдвигах. В связи с этим после определения  $\sigma^*$  устанавливаются физически и геометрически допустимые векторы сдвига, определяемые с помощью принципа минимума сдвига.

В результате решения указанной задачи оптимизации для каждого зерна определяется величина  $\sigma^*$ , а отсюда для любого заданного  $< d\epsilon >$  устанавливается значение

$$d\mathbf{P} = \left\langle d\boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle : \int_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\sigma}^* \, d\mathbf{V} \,. \tag{6.53}$$

Из (6.52) с учетом (6.53) получаем:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle d\boldsymbol{\epsilon} \rangle = dP,$$
 (6.54)

причем для заданного  $\langle d\epsilon \rangle$  величина dP – постоянная, уравнение (6.54) определяет гиперплоскость в пространстве напряжений с «единичной нормалью»  $\langle d\epsilon \rangle / |\langle d\epsilon \rangle|$ . Иначе говоря, (6.54) определяет геометрическое место концов «вектора напряжений», соответствующих приращению деформаций  $\langle d\epsilon \rangle$ . Кратчайшее расстояние от начала координат в пространстве напряжений до гиперплоскости, определенной соотношением (6.54), равно

$$\mathbf{d} = \Pi \mathbf{p}_{\langle \mathbf{d} \boldsymbol{\epsilon} \rangle} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \frac{\langle \mathbf{d} \boldsymbol{\epsilon} \rangle}{\left| \langle \mathbf{d} \boldsymbol{\epsilon} \rangle \right|} = \frac{\mathbf{d} \mathbf{P}}{\left| \langle \mathbf{d} \boldsymbol{\epsilon} \rangle \right|},$$

ИЛИ

$$\mathbf{d} = \left\langle \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle : \frac{\int \boldsymbol{\sigma}^* \, \mathbf{d} \mathbf{V}}{\left| \left\langle \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle \right|} \,. \tag{6.55}$$

Заметим, что конец «вектора»  $\int_{V} \sigma^* dV$  также расположен в этой гиперплоскости,

однако  $\int \sigma^* dV$  не обязательно совпадает с  $< \sigma >$ .

В соответствии с принципом градиентальности для поликристаллического агрегата для произвольной точки поверхности текучести  $<\sigma>$  внешняя нормаль к ней совпадает с  $<d\epsilon>/|<d\epsilon>|$ , т.е. касательная к поверхности текучести гиперплоскость в точке  $<\sigma>$  совпадает с определенной выше гиперплоскостью (6.54) для любого заданного  $<d\epsilon>$ . Отсюда следует, что поверхность текучести определяется как огибающая гиперплоскостей (6.54), построенных для всех возможных направлений  $<d\epsilon>/|<d\epsilon>|$ .

Напомним, что поскольку «пробные» деформации имеют нулевую гидростатическую составляющую, поверхность текучести является цилиндрической с образующей, направленной вдоль гидростатической оси. Для построения этой поверхности достаточно определить направляющую на девиаторной плоскости.

Отметим, что в случае изотропного поликристаллического агрегата поверхность текучести представляет собой круговой цилиндр. В этом случае достаточно определить его радиус для любого направления в девиаторной плоскости. Для изотропии материала «в целом» требуется так называемая статистическая однородность. Последняя выполняется, если в каждом из зерен упрочнение полагается одинаковым на каждой из систем скольжения, а сами

### Модель Линя

В большинстве работ по физической теории пластичности в качестве одного из основных недостатков моделей Тейлора, Бишопа-Хилла и их модификаций отмечается неучет упругих деформаций. Т.Г. Линь полагал [5], пренебречь что упругими деформациями можно в случае больших деформаций, пластических что недопустимо ситуации, В когда ЭТИ составляющие имеют один порядок. Однако подобная ситуация при анализе упругопластического деформирования представляет ограниченный интерес даже в теоретическом плане и весьма редко встречаются в практически важных задачах. Тем не менее, включение в рассмотрение упругих деформаций является необходимым исходя из потребности определения остаточных напряжений (второго рода), многом определяющих прочностные BO характеристики материала, и накапливаемой упругой энергии.

Модель Линя базируется на следующих основных гипотезах:

1. Деформация поликристаллического агрегата представляется суммой упругих и пластических составляющих:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^e + \boldsymbol{e}^p, \quad d\boldsymbol{e} = d\boldsymbol{e}^e + d\boldsymbol{e}^p. \tag{6.56}$$

2. Полные деформации отдельных зерен поликристалла ε<sub>(n)</sub> (n=1,2,...,N) равны полным деформациям поликристаллического агрегата:

$$\mathbf{\varepsilon}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{\varepsilon}, \quad \mathbf{e}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{e}, \quad \forall \mathbf{n} . \tag{6.57}$$

- 3. Пластические деформации являются изохорическими, изменение объема определяется первым инвариантом упругих деформаций.
- 4. Пластические деформации обусловлены сдвигом по кристаллографическим системам скольжения и подчиняются закону Шмида; упрочнение изотропно и определяется суммарным сдвигом по всем активным системам скольжения.

Рассмотрим соотношения для произвольно выбранного зерна. При наличии одной активной системы скольжения k осуществляемый в ней сдвиг  $\gamma^{(k)}$  связан с пластической деформацией  $e^p$  соотношением:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{p}} = \mathbf{M}^{(k)} \boldsymbol{\gamma}^{(k)}, \quad \mathbb{T}_{\mathbf{k}}.$$
(6.58)

При активизации нескольких систем скольжения девиатор пластической деформации определяется выражением:

$$\mathbf{e}^{\mathrm{p}} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \mathbf{M}^{(\mathrm{k})} \boldsymbol{\gamma}^{(\mathrm{k})} , \qquad (6.59)$$

где К – число активных систем скольжения.

В соответствии с гипотезой 4 критические сдвиговые напряжения в каждой системе скольжения одинаковы и зависят от суммарного сдвига:

$$\tau_{c}^{(k)} = \tau_{c} = f\left(\sum_{k} \left\| d\gamma^{(k)} \right\| \right).$$
(6.60)

Упругие деформации в зерне можно тогда определить соотношением:

$$\mathbf{e}^{\mathrm{e}} = \mathbf{e} - \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \mathbf{M}^{(k)} \boldsymbol{\gamma}^{(k)} .$$
 (6.61)

Упругие сдвиговые деформации в k-й системе скольжения равны:

$$\gamma^{e(k)} = \mathbf{M}^{(k)} : \left[ \mathbf{e} - \sum_{j=1}^{K} \mathbf{M}^{(j)} \gamma^{(j)} \right], \qquad (6.62)$$

а соответствующие сдвиговые напряжения определяются как

$$\boldsymbol{\tau}_{(k)} = 2G\boldsymbol{\gamma}^{e(k)} = 2G\mathbf{M}^{(k)} : \left[ \mathbf{e} - \sum_{j=1}^{K} \mathbf{M}^{(j)} \boldsymbol{\gamma}^{(j)} \right].$$
(6.63)

Рассмотрим процесс нагружения в пространстве деформаций. В начальный момент  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$ . При возрастании  $\mathbf{e}$  (по величине интенсивности) вначале деформирование осуществляется упругим образом вплоть до достижения в некоторой системе скольжения (например, с номером 1) сдвигового напряжения, равного по модулю начальному критическому напряжению  $\tau_{c0} = f(0)$ . После этого момента начинается неупругое скольжение по системе 1 при возрастающей деформации  $\mathbf{e}$ . При этом в каждый момент деформирования должно выполняться условие пластического течения

$$\boldsymbol{\tau}^{(1)} = \boldsymbol{\tau}_{c} = f(|\boldsymbol{\gamma}_{1}|),$$

ИЛИ

2G 
$$\mathbf{M}^{(1)}$$
: (e- $\mathbf{M}^{(1)}\gamma_1$ ) = f( $|\gamma_1|$ ). (6.64)

При выполнении (6.64) и возрастающей деформации е одиночный сдвиг продолжается до тех пор, пока в некоторой другой системе скольжения (например, 2) сдвиговое напряжение  $\tau^{(2)}$  не достигнет критического значения  $\tau_c = f(|\gamma_1|)$ . Начиная с этого момента, возрастание е вызывает двойное скольжение по системам 1 и 2, при этом должны выполняться условия:

$$\tau^{(1)} = \tau^{(2)} = \tau_{c} = f(|\gamma_{1}| + |\gamma_{2}|)$$

ИЛИ

$$2G\mathbf{M}^{(1)}:\left[\mathbf{e} - \sum_{i=1}^{2} \mathbf{M}^{(i)} \gamma^{(i)}\right] = 2G\mathbf{M}^{(2)}:\left[\mathbf{e} - \sum_{i=1}^{2} \mathbf{M}^{(i)} \gamma^{(i)}\right] = f(|\gamma_{1}| + |\gamma_{2}|).$$
(6.65)

Аналогичным образом рассматривается вовлечение в скольжение 3-й, 4-й и 5-й систем скольжения. При этом на каждой из активных систем скольжения должно выполняться условие текучести. Предполагая, что в каждой плоскости скольжения «положительному» и «отрицательному» направлению скольжения (вдоль одной прямой) отвечают различные номера систем скольжения, можно записать эти условия следующим образом:

$$2G\mathbf{M}^{(i)}:\left[\mathbf{e}-\sum_{k=1}^{K}\mathbf{M}^{(k)}\boldsymbol{\gamma}_{k}\right]=f\left(\sum_{k=1}^{K}\int d\boldsymbol{\gamma}_{k}\right), \quad i=\overline{\mathbf{l},K}, \quad (6.66)$$

где  $\gamma_k$ ,  $d\gamma_k$  неотрицательны, K=1,2,...,5 – число активных систем скольжения.

При продолжающемся деформировании возможно возникновение ситуации, когда условие текучести выполняется одновременно более чем в пяти системах скольжения (при использовании закона типа шмидовского для ГЦК-

кристаллов это соответствует нахождению ИТН в одной из вершин, где пересекаются 6 или 8 гиперплоскостей). В этом случае, опираясь на экспериментально известный факт о некотором превышении латентного упрочнения над деформационным (активным), предпочтение отдают ранее вовлеченным в скольжение системам.

В конкретных расчетах обычно использую систему уравнений (6.66), записанную в приращениях или в скоростной форме. Например, в приращениях указанные соотношения принимают вид:

$$2\mathbf{G}\mathbf{M}^{(i)}:\left[\Delta \mathbf{e} - \sum_{k=1}^{K} \mathbf{M}^{(k)} \Delta \gamma_{k}\right] = \mathbf{f}'(\gamma_{\Sigma}) \left(\sum_{k=1}^{K} \Delta \gamma_{k}\right), \quad \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{K}}, \quad (6.67)$$

где f' = df/d $\gamma_{\Sigma}$ ,  $\gamma_{\Sigma} = \sum_{n} \int |d\gamma_{n}|$  – накопленный суммарный сдвиг по всем активным системам скольжения (в том числе и бывшим активными ранее, в текущий момент деформирования перешедших в разряд пассивных).

Для перехода к модели поликристалла используется один из известных подходов к осреднению (чаще всего – ориентационное осреднение).

Модель Линя по сравнению с ранее рассмотренными обладает тем преимуществом, что позволяет определять последовательность активных систем скольжения и учитывает упругие деформации. В то же время использование гипотезы Фойгта (об однородности полных деформаций в представительном микрообъеме) приводит к нарушению условий равновесия на границах зерен. В связи с этим в дальнейшем как Линем, так и другими исследователями предпринимались и предпринимаются попытки построения так называемых самосогласованных моделей пластичности поликристаллов, в которых выполняются как условия совместности деформаций, так и условия равновесия на границах зерен [5]. В значительной мере эти исследования опираются на решение Эшелби задачи об одиночном эллиптическом включении в бесконечной однородной среде [5].

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

ОСНОВНОЙ

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд. АН СССР. 1963. 272 стр.

2.Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа. 1990. 368 стр.

3.Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности// Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. ВИНИТИ. 1990. **21**. С.3-75.

4.Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение. 1990. 223 стр.

5.Линь Т.Г. Физическая теория пластичности// Проблемы теории пластичности. Сер. Новое в зарубежной механике. Вып.7.- М.: Мир. 1976. С.7-68.

6.Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно – аналитическая теория прочности. – СПб.: Наука. 1993. 471 стр.

7.Вакуленко А.А. Связь микро- и макросвойств в упругопластических средах// Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. ВИНИТИ. 1991. **22**. С.3-54.

8. Трусов П.В., Келлер И.Э. Теория определяющих соотношений. Курс лекций. Ч.1. Общая теория. – Пермь: Перм. гос. техн. ун-т. 1997. 98 стр.

9. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов: В 2-х т./В.Е.Панин, В.Е.Егорушкин, П.В.Макаров и др. – Новосибирск: Наука. Сибирская издат. фирма РАН. 1995. Т.1. 298 стр.

10. Орлов А.Н. Введение в теорию дефектов в кристаллах. – М.: Высшая школа. 1983. 144 стр.

# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ

1<sup>\*</sup>.Кадашевич Ю.И., Пейсахов А.М., Помыткин С.П. О локальных законах деформирования нестабильных материалов// Новожиловский сб. СПб.: Судостроение. 1992. С.125-134.

2<sup>\*</sup>.Mroz Z. On the description of anisotropic work – hardening//J. Mech. Phys. Solids. 1967. Vol.15. No.3. Pp.163-175.

3<sup>\*</sup>.Валанис К. Обоснование эндохронной теории пластичности методами механики сплошной среды// Тр. ASME. Теоретические основы инженерных расчетов. 1984. Т.106. №4. С.72-81.

4<sup>\*</sup>.Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б. Современное состояние эндохронной теории пластичности// Проблемы прочности. 1991. №6. С.3-12.

5<sup>\*</sup>.Мосолов А.Б. Эндохронная теория пластичности. Препринт/ Ин-т проблем механики АН СССР. 1988. №353. 44 стр.

6<sup>\*</sup>.Кадашевич Ю.И., Михайлов А.Н. О теории пластичности, не имеющей поверхности текучести// ДАН СССР. 1980. Т.254. №3. С.574-576. 108

7<sup>\*</sup>.Келлер И.Э., Трусов П.В. Обобщение теории Бишопа – Хилла пластического формоизменения монокристалла// Изв. РАН. МТТ. 1997. №6. С.93-103.

8<sup>\*</sup>.Bishop J.F., Hill R. A theory of the plastic distortion of a polycristalline aggregate under combined stresses// Phil. Mag. Ser.7. 1951. Vol.42. No.327. Pp.414-427.

9<sup>\*</sup>. Bishop J.F.W., Hill R. A theoretical derivation of the plastic proporties of a polycristalline face – centered metal// Phil. Mag. Ser.7. 1951. Vol.42. No.334. Pp.1298-1307.

10<sup>\*</sup>.Lin T.H. Analysis of elastic and plastic strains of a face – centered cubic crystal// J. Mech. Phys. Solids. 1957. Vol.5. No.1. Pp.143-149.

11<sup>\*</sup>.Васин Р.А., Еникеев Ф.У. Введение в механику сверхпластичности: В 2-х ч. Уфа: Гилем. 1998. Ч.1. 280 стр.

12<sup>\*</sup>.Лахтин Ю.М., Леонтьева В.П. Материаловедение. М.: Машиностроение. 1980. 493 стр.

13<sup>\*</sup>.Кооперативные деформационные процессы и локализация деформации/ В.А.Лихачев, В.Е.Панин, Е.Э.Засимчук и др. Киев: Наукова думка. 1989. 320 стр.

14<sup>\*</sup>.Структурные уровни пластической деформации и разрушения/ В.Е.Панин, Ю.В.Гриняев, В.И.Данилов и др. Новосибирск: Наука. 1990. 255 стр.