П.В. Трусов, И.Э. Келлер

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Курс лекций

Часть I

Общая теория

ПЕРМЬ 1997

Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации

Пермский государственный технический университет

Кафедра математического моделирования систем и процессов

П.В. Трусов, И.Э. Келлер

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Курс лекций

Часть I

Общая теория

Рекомендовано Учебно-методическим отделом по направлению “Электроника и прикладная математика” в качестве учебного пособия для студентов специальности “Прикладная математика”

ПЕРМЬ 1997

УДК 539.3

Теория определяющих соотношений. Курс лекций. Ч.I. Общая теория / П.В. Трусов, И.Э. Келлер; Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 1997. 98 с.
ISBN 5-88151-130-1.

В предлагаемой I части курса лекций по теории определяющих соотношений рассматривается аксиоматика сплошных сред, заложенная работами А.А. Ильюшина, У. Нолла, К. Трусделла. Приводятся подходы к построению определяющих соотношений, основные понятия и положения общей теории, такие как материальный изоморфизм, равноправность, изотропия, связи, затухающая память. Кратко рассматриваются особенности построения определяющих соотношений для жидкостей и твердых тел. Курс снабжен набором упражнений.
Для студентов и аспирантов механико-математических специальностей.
Ил. 7. Библиогр.: 9 назв.

Рецензенты: кафедра механики композиционных материалов и конструкций Пермского государственного технического университета; д-р физ.-мат. наук, профессор А.А. Роговой

ISBN 5-88151-130-1

Оглавление

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

B — тело;
K_0, K_t — отсчетная и актуальная конфигурации;
X_0 — естественная конфигурация;
R_0, r — радиус-векторы частиц в K_0 и K_t;
ϕ, ϕ^* — системы отсчета, отличающиеся жестким движением;
$\mathbf{O}(t)$ — собственно ортогональный тензор;
O — собственно ортогональная группа;
$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_i$ — лагранжевы базисные векторы в K_0 и K_t;
θ — температура;
Σ, $\boldsymbol{M}$ — меры напряженного и деформированного состояний (произвольные);
$\mathbf{F}(\cdot)$ — определяющее отображение;
$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_\alpha$ — тензорзначные функции, характеризующие не термомеханические воздействия на материал;
σ — тензор напряжений Коши;
$\boldsymbol{K}$ — II-й тензор напряжений Пиола-Кирхгоффа;
R — ортогональный тензор, сопровождающий деформацию;
D — тензор деформации скорости;
A — вещественная аффинная группа;
C — пространственная группа кристалла;
$\underset{\sim}{\mathbf{J}}_\beta$ — тензорзначные внутренние переменные;
U, **V** — левый и правый тензоры искажения;
$\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r} \equiv \mathbf{F}^T$ — градиент места;
$\overset{\circ}{\mathbf{G}}$, **C** — мера и тензор деформации Коши-Грина;
G_{K_0} — группа равноправности конфигурации K_0;
U — унимодулярная группа.

СОКРАЩЕНИЯ

МДТТ — механика деформируемого твердого тела;
МСС — механика сплошной среды;
ОС — определяющие соотношения;
СН — сложное нагружение;
ТДС — термодинамическая система;
ТОС — теория определяющих соотношений;
ФТТ — физика твердого тела.

"Вся беда ... заключается в том, что не успевает завершиться работа, зачастую длительная и кропотливая, по аксиоматизации науки, как теория оказывается недостаточной для истолкования экспериментальных фактов, и возникает необходимость расширить, а иногда и полностью пересмотреть ее основы."

Л. Де Бройль

1. Введение. Основные понятия

В различных разделах естественнонаучных дисциплин (механике, физике, биологии и др.) принято выделять законы, справедливые для всех объектов исследования данного раздела, и соотношения, описывающие особенности поведения отдельных объектов или их совокупностей. К числу первых в механике и физике, например, относятся уравнения баланса массы, количества движения, энергии и т. д., справедливые для любых материальных тел, независимо от их конкретного строения, структуры, состояния. Заметим, что уравнения этой группы, как правило, связывают характеристики одного типа (например, в кинематические уравнения входят только характеристики изменения конфигурации; уравнения равновесия содержат только динамические характеристики и т. д.). Вторые в механике и физике обычно называют ***определяющими соотношениями, или физическими уравнениями, или уравнениями состояния.*** Соотношения этого класса устанавливают особенности поведения материальных объектов или их совокупностей (например, жидкостей, газов, упругих или пластичных сред и т. д.) при воздействии различных внешних факторов. Очевидно, определяющие соотношения должны отражать реальное атомно-молекулярное строение исследуемых материальных объектов.

Предметом настоящего курса является **анализ общих свойств определяющих соотношений, подходов к построению физических уравнений.** Кроме того, во второй части курса будут рассмотрены частные теории различных сред (главным образом, твердых деформируемых тел), разрабатываемые в последние 20-30 лет.

Рассматриваемые определяющие соотношения (ОС) относятся в основном к сплошным средам; в определенном смысле данный курс является специальным разделом механики сплошной среды (МСС). В силу последнего обстоятельства изложение будет в значительной мере опираться на понятия и определения, введенные в МСС. *По существу, ОС представляют собой модели, описывающие поведение сплошных сред, являющиеся необходимым элементом при моделировании любого процесса или явления в МСС.*

Поскольку ОС должны отражать физическое строение материальных тел, при их рассмотрении используются различные разделы физики (в частности, физика твердого тела). С другой стороны, являясь математическим моделированием поведения материальных тел, теория определяющих соотношений (ТОС) опирается на такие разделы математики, как алгебра, теория множеств, тензорное исчисление, функциональный анализ и др.

Следует отметить, что ОС представляет собой основной элемент, "сердцевину" любой математической модели физико-механических процессов. Именно ошибки в выборе или установлении ОС приводят к количественно (а в некоторых случаях — и качественно) неверным результатам моделирования. Особенно остро проблема установления определяющих соотношений стоит для материальных объектов, изготавливаемых из новых материалов или новыми способами.

Остановимся на некоторых основных определениях и понятиях. Как и в МСС, в ТОС будут рассматриваться не конкретные материальные объекты со всей совокупностью физических микрочастиц и взаимодействий между ними, а некоторые идеализации, модели этих объектов и(или) их частей, называемые в дальнейшем ***телами.*** Поведение каждого тела описывается определенным типом ОС, т. е. само определение тела неразрывно связано с установлением того или иного типа ОС.

Отметим, что один и тот же физический объект может описываться с помощью различных моделей, "тел". Данное обстоятельство связано, во-первых, со стремлением упростить вид ОС, что подвигает исследователя для различных диапазонов изменения внешних параметров (температуры, усилий и т. д.) использовать различные виды ОС; в противном случае ОС могут иметь чрезвычайно сложный вид.

Второй и не менее важной причиной является необходимая степень детализации, определяемая поставленной проблемой, физическими механизмами, ответственными за исследуемое явление. В зависимости от этого необходимо рассмотрение анализируемых процессов на различных масштабных и структурных уровнях, привлечение различных моделей для описания соответствующих физических механизмов. При этом может возникнуть необходимость во введении различных мер для анализа одного и того же процесса (например, деформирования) на различных структурных уровнях, установление связей между однотипными мерами, определенными на различных структурных уровнях, необходимость в построении иерархической совокупности моделей. В дальнейшем будем в основном рассматривать процессы деформирования, формоизменения материальных тел, происходящие под действием различных внешних воздействий. Деформирование осуществляется путем реализации большого числа механизмов и происходит на фоне непрерывного изменения структуры материала. Последнее приводит к существенному изменению свойств материала.

Учитывая огромное количество "носителей" того или иного механизма деформирования (точечные дефекты, дислокации, дисклинации, ротационные моды, зернограничные дислокации в кристаллических телах, изменение конфигурации макромолекул в полимерах и т. д.) и сложность учета попарного взаимодействия, представляется нецелесообразным и малопер-

спективным отказ от гипотезы сплошности даже при рассмотрении процессов деформирования с физической точки зрения. В этом случае в рассмотрение вводятся поля "носителей" тех или иных механизмов формоизменения и соответствующие поля динамического, термодинамического характера, формулируются эволюционные (кинетические) уравнения для описания их изменения на каждом структурном или масштабном уровне.

В связи с вышесказанным для каждого уровня можно ввести понятие ***представительного объема*** *как минимального объема материала, в котором содержится достаточное для статистического описания состояния число “носителей” рассматриваемых механизмов процесса. Добавление к этому объему других частей данного материала с аналогичной конфигурацией “носителей” анализируемых механизмов не должно приводить к изменению эволюционных уравнений для полевых величин, описывающих изменение конфигурации “носителей”. Часто предполагается, что размеры представительного объема таковы, что* ***градиентами*** *этих полевых величин в пределах представительного объема* ***можно пренебречь****.*

Для представительного объема любого уровня будет предполагаться, что ***времена релаксации*** *(по соответствующим механизмам)* ***существенно меньше*** *времен значительного изменения внешних воздействий. Иначе говоря, время перехода одной равновесной конфигурации “носителей” в другую равновесную конфигурацию существенно меньше времени изменения воздействий, вызывающих этот переход.*

Отметим, что при построении большинства физических теорий неявным образом вводится гипотеза о прямой или косвенной ***измеримости*** *всех физических величин, входящих в соответствующие уравнения состояния; аналогичная гипотеза будет принята и здесь.*

Под определяющими соотношениями будут пониматься ограничения (связи), накладываемые на параметры кинематического, динамического и термодинамического типов (соответствующего уровня) и историю их изменения. Данные связи на рассматриваемом уровне являются целевым отражением исследуемых свойств среды, описывающим взаимодействие частиц (молекул, атомов и т. д.) и эволюцию “носителей” механизмов анализируемого процесса в реальном материале.

Математические выражения определяющих соотношений чрезвычайно разнообразны, могут выражаться в виде “конечных” соотношений между мерами напряженного и деформированного состояний и другими параметрами, линейными и нелинейными дифференциальными связями, функциональными уравнениями. В последние годы широко распространенными являются ОС, содержащие дополнительные (так называемые внутренние) переменные, характеризующие микроструктуру, и эволюционные уравнения для них. В наиболее общей форме ОС могут быть записаны в виде операторных уравнений.

Заметим, что добавление ОС к уравнениям баланса (массы, количества движения и др.), справедливым для любых материальных тел, **должно делать систему уравнений замкнутой** относительно исследуемых параметров.

Для замыкания постановки краевой задачи к указанным уравнениям должны быть добавлены соответствующие краевые условия.

Как уже отмечалось ранее, в настоящем курсе изучаются главным образом ОС, описывающие процессы деформирования материальных тел (с возможным усложнением описания при учете структурных и фазовых превращений материала, что приводит к необходимости формулировки дополнительных эволюционных уравнений). Хотя основные понятия и положения вводятся для макроуровня (или “инженерного уровня”), они без существенных изменений могут быть перенесены на другие масштабные и структурные уровни; возникающая при этом потребность во введении дополнительных параметров не изменяет принципиальных положений.

Напомним основные положения и определения МСС. ***Отсчетная и актуальная конфигурации*** исследуемого тела B будут обозначаться как K_0 и K_t. Положения материальных частиц в K_0 и K_t относительно выбранных систем отсчета будут определяться радиусами-векторами $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$; при выделении частиц с помощью материального описания будет использоваться обозначение x. Наряду с ***системой отсчета*** ϕ для описания движения может использоваться система ϕ^*, оси систем координат которых в каждый момент времени t (здесь $t = t^*$) могут быть совмещены трансляционным переносом $\mathbf{r}_0^*(t)$ и поворотом, определяемым ортогональным тензором $\mathbf{O}(t) \in O$ (O — собственно ортогональная группа) и полюсом $\mathbf{r}_0(t)$. Отметим, что при переходе от описания движения частицы x с позиций наблюдателя ϕ к описанию наблюдателем ϕ^* соответствующие радиусы-векторы связаны соотношением:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^*(x,t) = \mathbf{r}_0^*(t) + \mathbf{O}^{T}(t)\cdot(\mathbf{r}(x,t) - \mathbf{r}_0(t)) =& \\ = \mathbf{r}_0^*(t) + (\mathbf{r}(x,t) - \mathbf{r}_0(t))\cdot\mathbf{O}(t).&\end{aligned} \tag{1}$$

Далее всюду будем считать $\mathbf{O}(0) = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичный тензор.

Описание тех или иных физических характеристик осуществляется с помощью тензорзначных функций, определяемых либо в терминах K_0 (например, $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$), либо в терминах K_t ($\hat{\mathbf{A}}$). При этом важное значение имеет ***свойство независимости*** рассматриваемой характеристики ***от выбора системы отсчета*** (или — от наложенного жесткого движения). Для тензорзначных характеристик, определяемых в терминах K_0, независимость от выбора системы отсчета называется ***инвариантностью по отношению к наложенному жесткому движению*** и математически записывается как

$$\underset{\sim}{\overset{\circ}{\mathbf{N}}}{}^*(x,t) = \underset{\sim}{\overset{\circ}{\mathbf{N}}}(x,t) \tag{2}$$

или

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{N}}}(\mathbf{r}^*(x,t),t) = \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{N}}}(\mathbf{r}(x,t),t)\,. \tag{2′}$$

Для тензорзначных характеристик, определяемых в терминах K_t, независимость от системы отсчета будет называться ***индифферентностью*** и означает равенство компонент тензорзначной функции в каждый момент времени в базисах лагранжевой вмороженной системы в K_t и K_t^*. Например, для тензорзначной функции 2-го ранга $\hat{\mathbf{A}}$ индифферентность определяется следующим соотношением:

$$\hat{\mathbf{A}}^*(x,t) = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\hat{\mathbf{A}}(x,t)\cdot\mathbf{O}(t)\,. \tag{3}$$

Здесь $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{A}}^*$ — одна и та же тензорная характеристика, определяемая наблюдателями ϕ и ϕ^* соответственно. Как нетрудно показать, из (1) следует связь между векторами лагранжева вмороженного базиса в K_t и K_t^*:

$$\hat{\mathbf{e}}_i^* = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}_i\cdot\mathbf{O},\;\; \hat{\mathbf{e}}^{*i} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\mathbf{e}}^i = \hat{\mathbf{e}}^i\cdot\mathbf{O}\,. \tag{4}$$

Остановимся подробнее на некоторых понятиях и определениях, связанных с независимостью от выбора системы отсчета, появившихся в последние годы. Изложение будет следовать в основном работе [6].

Объективные тензорные характеристики, типы объективности. Сплетающие операторы и простые диаграммы

Для ясности изложения ограничимся рассмотрением тензорных характеристик ранга не выше второго; определения и соотношения для тензоров более высокого ранга вводятся аналогичным образом. Пусть α, $\mathbf{a}_{(0)}$, $\mathbf{a}_{(1)}$, $\mathbf{A}_{(00)}$, $\mathbf{A}_{(01)}$, $\mathbf{A}_{(10)}$, $\mathbf{A}_{(11)}$ —тензорные характеристики (0-го, 1-го и 2-го рангов) движущейся среды. Предположим, что введенные тензорные характеристики процесса при замене системы отсчета (1) преобразуются в соответствии со следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\alpha^* = \alpha,\; \mathbf{a}^*_{(0)} = \mathbf{a}_{(0)},\; \mathbf{a}^*_{(1)} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{a}_{(1)} = \mathbf{a}_{(1)}\cdot\mathbf{O},\\ \mathbf{A}^*_{(00)} = \mathbf{A}_{(00)},\; \mathbf{A}^*_{(01)} = \mathbf{A}_{(01)}\cdot \mathrm{O},\; \mathbf{A}^*_{(10)} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}_{(10)},\; \mathbf{A}^*_{(11)} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}_{(11)}\cdot \mathrm{O}.\end{gathered} \tag{5}$$

Тензорные характеристики, преобразующиеся при заменах систем отсчета (1) согласно одному из правил (5), называются в [6] ***объективными***. Нижний (мульти) индекс, “длина” которого соответствует рангу тензора, связан с правилом преобразования тензорных характеристик; значения мультииндекса определяют тип объективности. Тензорные характеристики типа (0), (00) и т. д. в работе [6] называются ***материально ориентированными***, или ***материальными,*** или ***правыми*** (последнее название обусловлено тем, что относящийся к данному типу тензор искажения **U** называется в зарубежной литературе правым тензором искажения); тензорные характеристики типа (1),

(11) называются в [6] ***пространственно ориентированными***, или ***пространственными***, или ***левыми*** (по аналогии с **V** — “левой” по зарубежным определениям мерой искажения). Тензорные характеристики остальных типов (начиная с характеристик 2-го ранга) называются ***смешанными***. В ранее приведенной классификации приняты соответственно названия: характеристики, инвариантные по отношению к наложенному жесткому движению, индифферентные и “двухточечные” (смешанные). *Первые два названия, введенные в [6], не представляются согласующимися с физическим (геометрическим) смыслом соответствующих типов объективных характеристик, поэтому за исключением настоящего раздела будем придерживаться ранее введенных названий.*

Отметим также, что в силу того, что характеристики материального типа широко использовались в работах А.А. Ильюшина и Р. Хилла, а пространственного — в работах У. Нолла и К. Трусделла, в [6] первые предлагается называть характеристиками Ильюшина-Хилла, а вторые — Нолла-Трусделла.

В работе [6] вводится понятие ***аналогов***, или ***эквивалентных представлений*** родственных механических величин тензорными характеристиками одного ранга, но различных типов объективности. В общем случае каждой тензорной характеристике могут быть поставлены в соответствие несколько тензорных характеристик одного и того же типа объективности. В связи с этим в [6] вводится понятие ***простых аналогов***, согласно которому каждой объективной механической характеристике ставится в соответствие ровно одна родственная характеристика каждого типа объективности. В дальнейшем будем рассматривать только простые аналоги.

Определение [6].

Объективные разных типов векторные $\mathbf{a}_{(0)}$, $\mathbf{a}_{(1)}$ и тензорные (второго ранга) $\mathbf{A}_{(00)}$, $\mathbf{A}_{(01)}$, $\mathbf{A}_{(10)}$, $\mathbf{A}_{(11)}$ характеристики по отношению друг к другу будут называться простыми эквивалентными представлениями (простыми эквивалентами, простыми аналогами), если они связаны друг с другом попарно коммутативными физическими отображениями в виде следующих диаграмм:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_{(1)} \arrow[dd, leftrightarrow] \\ \\ \mathbf{A}_{(0)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbf{A}_{(11)} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] \arrow[dd, leftrightarrow] & \\ \mathbf{A}_{(10)} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathbf{A}_{(01)} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \mathbf{A}_{(00)} & \end{tikzcd} \qquad (6)$$

Здесь $\mathbf{A}_{(k)}$ (k=0,1) — линейное пространство всех (k)-объективных векторов ($\mathbf{a}_{(k)} \in \mathbf{A}_{(k)}$), $\mathbf{A}_{(k,l)}$ (k,l=0,1) — линейное пространство всех (k,l)-объективных тензоров ($\mathbf{A}_{(k,l)} \in \mathbf{A}_{(k,l)}$), стрелками обозначены состав-

ляющие диаграмму отображения — сплетающие операторы, выраженные соотношениями,

$$\mathbf{a}_{(k')} = \mathbf{T}_{(k',k)} \cdot \mathbf{a}_{(k)}, \qquad \mathbf{A}_{(k',l')} = \mathbf{T}_{1(k',k)} \cdot \mathbf{A}_{(k,l)} \cdot \mathbf{T}^{\mathrm{T}}_{2(l',l)} \qquad \mathop{\Sigma}_{k,l}, \tag{7}$$

$\mathbf{T}_{(k',k)}$, $\mathbf{T}_{1(k',k)}$, $\mathbf{T}_{2(k',k)}$ **— невырожденные (k′,k)-объективные тензоры, удовлетворяющие условиям**

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_{(k,k)} \equiv \mathbf{E}, \qquad \mathbf{T}_{(k,l)} \equiv \mathbf{T}^{-1}_{(l,k)}, \\ &\mathbf{T}_{i\,(k,k)} \equiv \mathbf{E}, \qquad \mathbf{T}_{i\,(k,l)} \equiv \mathbf{T}^{-1}_{i\,(l,k)} \qquad (i = 1,2;\ k,l = 0,1;\ \mathop{\Sigma}_{k}). \end{aligned} \tag{8}$$

Тензоры $\mathbf{T}_{(k,l)}$, $\mathbf{T}_{i\,(k,l)}$ называют переходными тензорами диаграмм (6).

Диаграммы (6) связывают механически родственные характеристики; при этом все элементы отображений (7) отнесены к произвольно выделенным моменту времени и точке тела (или телу в целом) в любом его движении в произвольно выбранной системе отсчета.

В качестве переходных тензоров могут использоваться градиенты места, ортогональный тензор, сопровождающий деформацию и другие (упр. 2,3,9,13,17,18,19,22,23).

Понятие простых аналогов относится прежде всего к объективным векторам и тензорам, выражающим родственные друг другу механические характеристики, т. е. имеющие сходный смысл и, как правило, общую для них физическую единицу измерения. Такими родственными характеристиками являются, например, различные тензоры деформаций, тензоры напряжений, объективные производные тензоров деформаций, объективные производные тензоров напряжений. Простые диаграммы позволяют для любой объективной механической характеристики построить полный набор ее аналогов разных типов, единственным образом определяемый этой характеристикой и диаграммой.

Назовем, вслед за автором [6], простую диаграмму тензоров второго ранга, определяемую с помощью (6)-(8), ***квазисимметричной***, если $\mathbf{T}_{2(10)} \equiv \alpha\mathbf{T}_{1(10)}$ с $\alpha \neq 0$, и ***симметричной***, если при этом $\alpha \equiv 1$. Пару простых диаграмм, определяемых соответственно переходными тензорами $\mathbf{T}^{(1)}_{i(kp)}$ и $\mathbf{T}^{(2)}_{i(kp)}$ вида (8), назовем ***квазисопряженной*** (а сами диаграммы взаимно ***квазисопряженными***), если $\mathbf{T}^{(2)}_{1(10)} \equiv \beta\,\mathbf{T}^{(1)\,-\mathrm{T}}_{1(10)}$ и $\mathbf{T}^{(2)}_{2(10)} \equiv \gamma^{-1}\,\mathbf{T}^{(1)\,-\mathrm{T}}_{2(10)}$ с $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$, и ***сопряженной*** (диаграммы — взаимно сопряженными), если при этом $\beta \equiv \gamma = 1$.

Можно показать* [6], что квазисимметричными (но не симметричными) являются диаграммы Коши-Пиолы и Коши-Хилла, симметричными — диаграммы Грина-Альманси, Коши-Ильюшина, нейтральная, коротационные; косые диаграммы Хилла-Седова не квазисимметричны. Диаграмма Грина-Альманси квазисопряжена каждой из диаграмм Коши-

* Определения всех диаграмм даны в упр. 9-23.

Пиолы и Коши-Хилла, и сопряжена диаграмме Коши-Ильюшина. Любая нейтральная или коротационная диаграмма самосопряжена. Косые диаграммы Хилла-Седова составляют сопряженную пару.

Энергетическая сопряженность [4] пар одноименных простых аналогов тензорных мер напряжений и деформаций и их симметричность полностью обеспечивается сопряженностью пары диаграмм деформаций и напряжений и квазисимметричностью любой (а потому и каждой из них), и множество таких диаграмм порождает полный класс симметричных энергетически сопряженных тензорных мер напряжений и деформаций, построенных на базе простых диаграмм.

Основные подходы к установлению определяющих соотношений

Рассмотрим **основные подходы** к формулировке определяющих соотношений, широко используемые в настоящее время. К их числу можно отнести следующие подходы:

- феноменологический макроскопический (макрофеноменологический),
- структурно-механический (имитационный),
- термодинамический,
- физический.

Следует отметить, что практически все известные подходы, на любых структурных и масштабных уровнях опираются на феноменологическое рассмотрение соответствующих явлений. Феноменологический подход часто трактуется как опытное рассмотрение "входов" и "выходов" некоего "черного ящика", о содержании которого исследователю практически ничего не известно. Однако это представляется слишком упрощенным и не совсем корректным толкованием существа подхода. В действительности без каких-либо предварительных данных о сущности происходящих в исследуемом объекте процессов установление сколько-нибудь удовлетворительных связей между "входами-выходами" практически невозможно. В то же время каждый исследуемый объект, процесс, явление всегда остается в той или иной мере "черным ящиком", поскольку исследователь не располагает абсолютной истиной о происходящих явлениях. В связи с этим следует подчеркнуть условность названий подходов, отсутствие четко выраженных "границ раздела" между указанными методами построения ОС.

Исторически первым и одним из наиболее продуктивных до настоящего времени можно считать **феноменологический макроскопический** (**макрофеноменологический**) **подход**. Он является основой для получения ОС в терминах макропеременных континуальных тел (напряжений, деформаций, температур и т. д.), широко используемых для решения большого круга прикладных инженерных задач. Суть данного подхода состоит в следующем.

На начальной стадии с использованием физического анализа, имеющихся экспериментальных данных формулируются некоторые гипотезы достаточно общего характера (часто в виде некоторых аксиом или принципов), обосновывается их непротиворечивость; вводятся основные понятия и определения, включая необходимые для описания процесса или явления переменные (или параметры состояния). Затем устанавливается общий вид определяющих соотношений; осуществляется переход к частным теориям; намечается программа макроэкспериментов, необходимых для определения входящих в ОС характеристик материала. После определения последних устанавливается явный вид ОС и осуществляется их экспериментальная проверка (как правило, в экспериментах, отличных от проводимых на стадии определения характеристик материала). Одновременно находится область применимости формулируемых ОС (диапазоны нагрузок, температур, вид нагружения и т. д.).

Таким образом, обязательным и во многом решающим элементом данного подхода является макроэксперимент. Наиболее актуальными в настоящее время являются эксперименты на сложное нагружение (СН) и создание соответствующих машин СН, оборудованных необходимой измерительной и управляющей аппаратурой. Следует отметить, что одна из первых машин СН была создана в нашей стране в 40-х годах нашего столетия под руководством А.А. Ильюшина.

В настоящее время эксперименты на СН осуществляются либо на плоских, либо на тонкостенных трубчатых образцах (изотропные материалы). Последний вариант представляется более предпочтительным, поскольку позволяет реализовать трехмерные траектории деформации при совместном действии внутреннего давления, растяжения вдоль оси образца и кручения (так называемые p-N-M опыты), траектории деформаций с поворотом трехгранника главных осей меры деформаций вокруг одной из осей (p-M и N-M опыты). Задача реализации в эксперименте общего случая деформирования (в 5- или 6-мерном пространстве) до настоящего времени является неразрешенной проблемой.

Следует отметить, что в последние годы макроэксперименты часто сопровождаются исследованиями эволюции микроструктуры. Однако в рамках анализируемого подхода последние используются как вспомогательные, позволяющие качественно оценить правильность начального физического анализа механизмов рассматриваемого процесса.

Другим широко применяемым на протяжении последнего столетия является **имитационный** (или структурный, или структурно-механический) **подход**. Основные причины его распространенности и достаточно высокой эффективности заключаются, по нашему мнению, в простоте исходных положений, отсутствии существенных сложностей в реализации, ясности физической интерпретации, возможностях построения достаточно сложных ОС из набора элементарных моделей.

В соответствии с данным подходом вначале обычно строится модель материала, описывающая одноосное нагружение. С этой целью на основе физического анализа и имеющихся экспериментальных данных определяется набор элементарных “структурных элементов” (моделей), отвечающих за тот или иной механизм исследуемого процесса (деформирования). Как правило, структурные элементы ассоциируются с простейшими механическими моделями (упругими пружинами, элементами сухого трения и т. д.). Затем из физического рассмотрения процесса строится структурная схема описания поведения материала, включающая различные способы соединения введенных структурных элементов. Записываются одноосные определяющие соотношения, намечается программа и осуществляются эксперименты для идентификации модели в целом.

После этого с помощью дополнительных гипотез осуществляется переход к многомерным моделям. На заключительной стадии построения модели проводится проверка адекватности предлагаемых ОС исследуемому процессу в экспериментах на сложное нагружение.

Как нетрудно видеть, имитационный и макрофеноменологический подходы имеют много общего (физический анализ, макроэксперименты). Основное различие состоит в способе определения вида ОС. При этом структурные модели могут служить хорошим исходным приближением ОС в феноменологическом макроскопическом подходе (равно как и в рассмотренном ниже термодинамическом подходе).

В последние 20-30 лет интенсивно развивается **термодинамический подход** к построению ОС. Суть подхода состоит в конструктивном использовании основных законов термодинамики (классической и неравновесной) и термодинамических соотношений для определения вида ОС. К настоящему времени существуют несколько способов построения ОС в рамках данного подхода. Один из наиболее распространенных из них осуществляется по следующей схеме.

Исследуемое тело (или его часть) представляются термодинамической системой (ТДС), с присущими ей определениями, законами, соотношениями. На основе физического анализа исследуемого процесса выделяются термодинамические переменные, описывающие состояние и эволюцию ТДС. Из числа последних выделяется конечное число независимых термодинамических переменных (параметров состояния), в том числе определяются тензорные характеристики исследуемой среды. Кроме этого, при построении моделей реальных материалов и процессов деформирования требуется введение дополнительных параметров (часто называемых внутренними параметрами или переменными). В большинстве случаев внутренние переменные характеризуют микроструктуру исследуемого материала, и в этом качестве входят в ОС. Для описания изменения внутренних параметров формулируются соответствующие эволюционные (кинетические) уравнения, связывающие внутренние параметры и их производные с параметрами состояния. *Наиболее распространенной формой кинетических уравнений являются соотношения балансового типа, в которых источники (стоки) зависят от параметров состояния и внутренних переменных. Не исключается более сложный случай функционально-дифференциальных эволюционных уравнений. Представляется перспективным использование для формулировки кинетических соот-*

ношений иерархических моделей. Обычно вид кинетических уравнений в рамках данного подхода устанавливается из термодинамических соотношений, при этом часто требуется привлечение дополнительных физических гипотез. В то же время возможным является эвристический подход к их формулировке, после чего осуществляется проверка на непротиворечивость уравнений соотношениям термодинамики.

Следующий этап — выбор термодинамического потенциала (из числа известных или введение нового). Выбор потенциала зависит от анализируемого процесса, в частности — от условий сопряжения ТДС с окружающей средой. Наконец, с использованием термодинамического потенциала, термодинамических соотношений и законов термодинамики получают вид кинетических и определяющих уравнений. При необходимости вводятся дополнительные гипотезы и соотношения, не следующие из термодинамики (например, условие текучести для упругопластического деформирования).

В термодинамическом подходе достаточно хорошо разработан формализм построения общего вида определяющих соотношений. Однако не следует полагать, что проблема построения ОС тем самым полностью решена. Действительно, в термодинамическом подходе центр тяжести проблемы переносится на установление конкретного вида термодинамического потенциала для исследуемого класса процессов. Эта задача часто по сложности не уступает проблеме построения ОС.

Построение ОС, как и в предшествующих подходах, завершается экспериментальными исследованиями для определения входящих в ОС физико-механических характеристик материала и верификации модели.

Отметим, что в ряде работ ОС, полученные с помощью вышеприведенных подходов, называются математическими теориями (в отличие от физических теорий).

В последние 15-20 лет особенно активно ведутся работы по построению ОС на основе **физического подхода**. По нашему мнению, физические теории являются наиболее перспективными, в частности — в области “проектирования” новых материалов, с априори заданными свойствами. К физическим теориям относят все модели, основанные на описании поведения и взаимодействия микрочастиц (молекул, атомов и т. д.). Большое внимание при этом уделяется рассмотрению микродефектов (вакансий, межузельных атомов, дислокаций, дисклинаций) кристаллической решетки, анализу микроструктуры материалов. Отметим, что в силу огромного количества микродефектов в кристаллических телах, при построении ОС часто используют их континуальное представление (например, тензор плотности дислокаций).

Построение ОС в рамках физического подхода начинается с тщательного физического анализа исследуемого процесса (деформирования, течения), определения микромеханизмов процесса, введения микрообъектов, ответственных за его протекание, и соответствующих параметров. После этого устанавливаются законы взаимодействия для параметров, описывающих указанные микрообъекты, записываются эволюционные уравнения для них (часто — для их континуального аналога). Затем осуществляется выбранная процедура осреднения по определенному представительному объему. На заключительной стадии, как и в предшествующих подходах, осуществляются экспериментальные исследования для определения физико-механических характеристик и верификации модели.

Отметим, что существенные успехи достигнуты к настоящему времени в построении физических теорий монокристаллов и поликристаллов. Исследования данного направления в значительной мере основываются на пионерских работах Дж.И. Тэйлора, Г. Закса, Н.К. Снитко, С.Б. Батдорфа, Б. Будянского. Особенно интенсивно работы в рамках физического подхода ведутся в последние 10-20 лет. Из исследований последнего периода следует отметить работы В.А. Лихачева и В.Г. Малинина, в которых достаточно детально (вплоть до прикладных аспектов) разработана структурно-аналитическая теория прочности и пластичности.

В дальнейшем, чтобы сосредоточить внимание на изучении именно ОС, будет использоваться понятие динамического процесса. Под ***динамическим процессом*** будем понимать упорядоченную пару радиуса-вектора **r** частицы x для тела B и меры напряженного состояния (тензора второго ранга Σ), если **выполнены уравнения количества движения и момента количества движения.** Динамический процесс определяется по отношению к выбранной системе отсчета, однако входящие в его определение поля должны обладать тем или иным типом независимости от выбора системы отсчета. Иначе говоря, динамическому процессу (**r**, Σ), определенному в системе отсчета ϕ, можно поставить в соответствие ***эквивалентный процесс*** ($\mathbf{r}^*$, Σ^*) в системе отсчета ϕ^*.

Следует подчеркнуть чрезвычайную сложность построения определяющих соотношений для новых, неизвестных материалов. В этом случае исследователь начинает построение практически “на чистом холсте”, при отсутствии даже контуров будущей “картины”. Неоценимую помощь при этом может оказать **априори сформулированная совокупность принципов (аксиом)**, пригодных для широкого класса материалов. Последние представляют собой обычно результат обобщения и физического осмысления весьма большого количества экспериментальных и теоретических данных. Иными словами, при построении ОС любого структурного и масштабного уровней после введения необходимых понятий и определений следует сформулировать совокупность аксиом, составляющих “скелет” формулируемой теории. В дальнейшем вводимые дополнительные гипотезы не должны противоречить ни одной из принятых аксиом. Во многих случаях совокупность этих принципов позволяет не только сузить круг возможных типов ОС, но и играет конструктивную роль, позволяет конкретизировать первоначально достаточно общий вид ОС. Подобный подход в теории ОС, называемый ***аксиоматическим*,** завоевал широкое признание в последние десятилетия. Его изложению будет посвящена первая часть предлагаемого курса.

В настоящем курсе будут анализироваться ОС процессов деформирования материальных объектов, подвергающихся термомеханическим и другим воздействиям. В качестве воздействий будут использоваться изменения конфигурации исследуемых тел $\mathbf{r}\,(\mathbf{R}_0,t)$ и изменение температуры $\theta\,(\mathbf{R}_0,t)$. Другие возможные воздействия (например, радиацию) будем определять тензорзначными функциями произвольного ранга $\underset{\sim}{\mathbf{X}_\alpha}$, $\alpha=1,2,...,A$. Выбранные меры напряженного и деформированного состояний (в общем случае — произвольных) будут обозначаться Σ и $\boldsymbol{M}$, соответственно; при необходимости будет вводиться их конкретизация. В качестве отклика (реакции) материала в большинстве случаев будет рассматриваться изменение напряженного состояния.

Остановимся на основных аксиомах теории определяющих соотношений. Необходимо отметить, что аксиоматика ТОС на настоящий момент не единственна. По нашему мнению, наиболее интересным представляется рассмотрение аксиом У. Нолла [9] и А.А. Ильюшина [3].

2. Аксиомы теории определяющих соотношений

Приведем сначала несколько модифицированные аксиомы Нолла [5].

Аксиома N1 (принцип детерминизма)

Напряженное состояние частицы $\mathbf{R}_0$ в момент t определяется предысториями температуры θ^t, движения $\mathbf{r}^t$ тела B и предысториями изменения воздействий иных (не термомеханических) типов $\underset{\sim}{\mathbf{X}^t_\alpha}$ вплоть до момента t :

$$\Sigma\,[\mathbf{r}\,(\mathbf{R}_0,t),t]=\mathbf{F}\,(\mathbf{r}^t,\theta^t,\underset{\sim}{\mathbf{X}^t_\alpha};\ \mathbf{R}_0,t)\,. \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{F}$ представляет собой оператор (отображение) предысторий термомеханического состояния ($\mathbf{r}^t$, θ^t) и воздействий не термомеханических типов на множество тензорзначных функций. Область определения оператора по первому аргументу функций $\mathbf{r}_0\,(\mathbf{R}_0,t)$, $\theta^t\,(\mathbf{R}_0,t)$, $\underset{\sim}{\mathbf{X}^t_\alpha}\,(\mathbf{R}_0,t)$ есть множество всех точек тела B в K_0 ; иными словами, напряжение в точке $\mathbf{r}_0\,(\mathbf{R}_0,t)$ в момент времени t зависит от совокупной истории изменения состояния **всего тела** B, а не только выделенной частицы. Два последних аргумента в правой части (9) указывают на явную зависимость реакции тела на воздействия от расположения исследуемой частицы в теле и от времени. Иными словами, из рассмотрения не исключаются неоднородные тела и материалы с реономными и нелокальными свойствами. Оператор $\mathbf{F}$ часто называют ***определяющим***

отображением частицы $\mathbf{R}_0$. Введенное здесь определяющее отображение содержит в своей структуре известное из многочисленных экспериментов ***свойство “памяти” материалов***, т. е. свойство зависимости реакции материала (напряженного состояния) не только от его текущей конфигурации, но, вообще говоря, от истории всех воздействий. При этом не исключается случай отсутствия памяти ($\mathbf{F}$ определяет зависимость Σ от текущих значений параметров воздействия), или бесконечно малой (мгновенно затухающей) памяти. В последнем случае Σ зависит от текущих значений параметров воздействия и от их производных по времени.

Отметим, что в механике рассматриваются только системы отсчета, **сохраняющие направление изменения времени**, что используется с самого начала и во введенном определении физических уравнений. Из (9) следует, что текущая реакция материала (напряженное состояние) определяется прошлыми и текущими воздействиями и не зависит от будущих воздействий. При этом в реальных материалах прошлые воздействия не могут быть восстановлены по информации о текущем и будущем состояниях тела. Необратимость процессов, происходящих в исследуемых объектах, присуща подавляющему большинству тел, что коренным образом отличает механику сплошных сред от теоретической (аналитической) механики. Необратимость находит свое отражение и в общей форме ОС (9).

Следует отличать необратимость ОС от необратимости процессов формоизменения. В некоторых частных случаях уравнение (9) может быть разрешено относительно истории изменения конфигурации, так что последняя представляется оператором от истории нагружения (хотя в большинстве случаев это невозможно даже для достаточно простых сред, например, идеальной жидкости).

Однако в МСС возникают существенно более сложные задачи восстановления генезиса, истории формоизменения по настоящему и будущим состояниям материала. Успешное решение подобных задач могло быть огромным достижением в проектировании конструкций и технологии их изготовления. По нашему мнению, подобные задачи имеют право на существование, но при этом следует иметь в виду, что должны существовать ОС, описывающие реакцию материала на возможные воздействия в прошлом. Только в этом случае возможно проникновение в прошлое по будущему и настоящему.

Аксиома N2 (принцип локального действия)

В предыдущей аксиоме для любого тела, как бы велико оно не было, допускается влияние предысторий движения (и других воздействий) каждой частицы тела на напряженное состояние в любой фиксированной частице тела. В курсе МСС одним из существенных предположений является исключение из рассмотрения объемных внутренних сил, внутренних взаимодействий на расстоянии. Взаимодействие частиц, как показывает практика использования соотношений МСС, достаточно хорошо описывается с помощью контактных сил. Поскольку в настоящем курсе принимаются положения континуальной механики (с некоторыми дополнениями, касающимися физических механизмов формоизменения и их описания), отсутствуют причины, по которым указанное предположение не могло бы использоваться и при формулировке ОС.

У. Ноллом рассматриваемая аксиома была сформулирована только для изотермического деформирования тела, т. е. единственным воздействием является изменение конфигурации. В этом случае аксиома может быть записана следующим образом [5]:

Движение частиц, находящихся в некоторой конфигурации на любом конечном расстоянии от $\mathbf{R}_0$, можно не учитывать при определении напряженного состояния в $\mathbf{R}_0$.

Практически идентичная формулировка содержится в [1]: "Напряжения в точке однозначно определяются историей деформирования в произвольно малой окрестности данной материальной точки".

При этом, говоря о произвольно малом объеме, не следует забывать об уже введенной идеализации реального физического объекта, об используемых понятиях тела и представительного объема. Указанный "произвольно малый объем" пригоден для дальнейшего анализа результатов только при ясном понимании того факта, что все величины относятся к осредненным по представительному объему параметрам.

Обобщение аксиомы на случай произвольных воздействий представляется возможным сформулировать в следующей форме:

***Напряженное состояние в выделенной частице** $\mathbf{R}_0$ **тела** B **полностью определяется историей совокупности воздействий** $\{\mathbf{r}^t, \theta^t, \underset{\sim}{\mathbf{X}}{}_\alpha^{\mathbf{t}}\}$ **на малую окрестность частицы** $\mathbf{R}_0$ **тела** B.*

Данная аксиома имеет очень большое значение, так как позволяет отделить проблему формулировки ОС для материала от проблемы исследования поведения реальных тел под действием различных внешних факторов.

Иными словами, аксиома N2 утверждает следующее: если два идентичных (в K_0) тела B_1 и B_2 совершают различные в общем случае движения $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ под действием отличающихся внешних факторов, но в ε-окрестностях выделенных в K_0 частиц $\mathbf{R}_{01}$ и $\mathbf{R}_{02}$ история совокупности воздействий $\{\mathbf{r}^t, \theta^t, \underset{\sim}{\mathbf{X}}{}_\alpha^{\mathbf{t}}\}$ одинакова, то и отклик (напряженное состояние) в частицах $\mathbf{R}_{01}$ и $\mathbf{R}_{02}$ в этих двух движениях будет одинаков (естественно, по отношению к материальным осям, совпадающим в K_0).

Следует отметить, что в принципе локального действия не предусматривается однородность отклика материала, т.е. различным частицам тела B могут отвечать различные операторы $\mathbf{F}$.

Аксиома N3 (принцип материальной индифферентности)

В ряде источников используются другие названия принципа: **принцип "объективности"** или **принцип независимости от выбора системы отсчета.**

Рассмотрим введенное ранее понятие динамического процесса и будем называть совокупность параметров $\{\mathbf{r},\Sigma,\theta,\underset{\sim}{\mathbf{X}}_\alpha\}$ ***физико-механическим процессом*** для исследуемого тела B, если данная совокупность удовлетворяет динамическим и термодинамическим соотношениям (возможно, и некоторым дополнительным уравнениям для параметров $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_\alpha$, общим для рассматриваемого класса сплошных сред и воздействий). ***Эквивалентными*** будем называть физико-механические процессы $\{\mathbf{r},\Sigma,\theta,\underset{\sim}{\mathbf{X}}_\alpha\}$ и $\{\mathbf{r}^*,\Sigma^*,\theta^*,\underset{\sim}{\mathbf{X}}_\alpha^*\}$, происходящие в теле B, но рассматриваемые с позиций наблюдателей ϕ и ϕ^*, соответственно. Поскольку определяющие соотношения отражают внутренние связи материальных частиц рассматриваемого тела, естественно предположить независимость ОС от выбора системы отсчета, даже если системы отсчета движутся относительно друг друга, но таким образом, что в любой соответствующий момент времени (t в ϕ и t^* в ϕ^*) могут быть совмещены трансляцией и жестким поворотом). Именно это предположение и составляет суть принципа объективности.

Принцип объективности.

Если уравнению состояния (9) удовлетворяет физико-механический процесс $\{\mathbf{r},\Sigma,\theta,\underset{\sim}{\mathbf{X}}_\alpha\}$, то ему удовлетворяет и любой эквивалентный процесс $\{\mathbf{r}^*,\Sigma^*,\theta^*,\underset{\sim}{\mathbf{X}}_\alpha^*\}$,

$$\Sigma^*[\mathbf{r}^*(\mathbf{R}_0,t^*),t^*]=\mathbf{F}\ [\mathbf{r}^{*\,t^*},\theta^{*\,t^*},\underset{\sim}{\mathbf{X}}_\alpha^{*\ t^*};\ \mathbf{R}_0,t^*]. \qquad (10)$$

Аналогичную формулировку можно привести для случая двух движений, отличающихся на жесткое движение.

Принцип объективности поведения материала подразумевает требование изотропии и однородности пространства: изменение системы отсчета наблюдателя не сказывается на операторе **F** *(функционале памяти). Следует подчеркнуть, что требование изотропии пространства не связано с изотропией материала — анизотропные тела также подчиняются принципу объективности.*

"Объективность" определяющих соотношений **не предполагает**, вообще говоря, что **все входящие в него параметры "объективны"**, т. е. индифферентны или инвариантны по отношению к наложенному жесткому движению. Требования аксиомы N3 менее ограничительны. В то же время принцип независимости от системы отсчета можно достаточно просто выполнить формулированием определяющих соотношений в терминах K_0 с использованием инвариантных по отношению к наложенному жесткому движению тензорзначных параметров. Однако в этом случае возникают сложности физического анализа ОС.

Заметим, что в некоторых работах отдельно формулируется требование инвариантности используемых уравнений от системы координат. Данное требование позволяет освободиться от определенного произвола, субъективизма исследователя, предпочитающего ту или иную конкретную систему координат. Это ограничение полностью выполняется при записи уравнений в тензорной форме. Не следует отождествлять требование инвариантности к выбору системы координат с аксиомой независимости от выбора системы отсчета. Последняя может быть нарушена даже в случае записи всех уравнений в тензорной форме, особенно при использовании в уравнениях производных по времени от тензорзначных функций.

3. Простые материалы

В аксиоме N2 принято предположение о влиянии на напряженное состояние в точке $\mathbf{r}(x,t)$ предыстории физико-механического процесса в малой ε-окрестности рассматриваемой частицы x (или $\mathbf{R}_0^x$, верхний индекс “x” обозначает фиксированность частицы). Учитывая непрерывность непрерывно дифференцируемого отображения $K_0 \to K_\mathbf{t}$ (или $\mathbf{R}_0 \to \mathbf{r}$), для любой малой ε-окрестности в $K_\mathbf{t}$ (т.е. $|\mathbf{r}(\mathbf{R}_0,t) - \mathbf{r}(\mathbf{R}_0^x,t)| < \varepsilon$) можно определить малую ε_0-окрестность в K_0: $N\,(\mathbf{R}_0^x) = \{\mathbf{R}_0 \in K_0(B) \big|\, |\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_0^x| < \varepsilon_0\}$, так что $\forall \mathbf{R}_0 \in N\,(\mathbf{R}_0^x)\ \ |\mathbf{r}(\mathbf{R}_0,t) - \mathbf{r}(\mathbf{R}_0^x,t)| < \varepsilon\ \ (\forall t)$. Далее предположим существование и остальных производных отображения $K_0 \to K_\mathbf{t}$ (т. е. существование градиентов $\mathbf{r}$ произвольного порядка, определенных в терминах K_0).

Тогда положение частиц из $N\,(\mathbf{R}_0^x)$ в любой момент времени t в конфигурации $K_\mathbf{t}$ можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\mathbf{R}_0,t) = \mathbf{r}(\mathbf{R}_0^x,t) + \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}_0^x,t) + \Delta\mathbf{R}_0 \cdot (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^x,t)) + \\ + \frac{1}{2!}\Delta\mathbf{R}_0 \cdot \left[\Delta\mathbf{R}_0 \cdot (\overset{\circ}{\nabla}\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^x,t))\right] + \ldots\ .\end{aligned} \tag{11}$$

В правой части (11) $\Delta\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_0^x$ полагается известным в силу определенности отсчетной конфигурации $K_0(B)$. *Отметим, что аргумент* $\mathbf{R}_0^x$ *во втором и дальнейших членах правой части (11) относится к значениям градиентов, а не радиуса-вектора* $\mathbf{r}$. Следовательно, предыстория движения $(\mathbf{r}(\mathbf{R}_0,t))^t$ частиц окрестности $N\,(\mathbf{R}_0^x)$ полностью определяется предысторией движения частицы $\mathbf{R}_0^{x}$ и предысторией первого, второго и т. д. градиентов $\mathbf{r}(\mathbf{R}_0,t)$, вычисленных для частицы $\mathbf{R}_0^{x}$.

С учетом вышесказанного выражение определяющего соотношения (9) может быть трансформировано к виду

$$\Sigma\,[\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^{x},t),t]=\mathbf{F}[(\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^{x},\tau))^t,(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^{x},\tau))^t,(\overset{\circ}{\nabla}\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^{x},\tau))^t,\ldots,\\ \theta^t,\underset{\sim}{\mathbf{X}}{}_{\alpha}^{t};\ \mathbf{R}_0^{x},t]. \qquad (12)$$

Высший порядок входящего в определяющее отображение градиента места определяет так называемый ***порядок материала.*** Материалы ***первого порядка*** называются ***простыми***. По существу, в МСС рассматриваются почти исключительно только простые материалы. Для материала 1-го порядка (12) приобретает вид

$$\Sigma\,[\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^{x},t),t]=\mathbf{F}[(\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^{x},\tau))^t,(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^{x},\tau))^t,\theta^t,\underset{\sim}{\mathbf{X}}{}_{\alpha}^{t};\ \mathbf{R}_0^{x},t].$$

Полагая поля θ *и* $\underset{\sim}{\mathbf{X}}{}_{\alpha}$ *достаточно гладкими, с учетом аксиомы N2 в определяющих соотношениях под* θ^t, $\underset{\sim}{\mathbf{X}}{}_{\alpha}^{t}$ *следует понимать предысторию изменения соответствующих параметров и, возможно, их первых градиентов для частицы* $\mathbf{R}_0^{x}$.

Заметим, что история изменения радиуса-вектора $\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^{x},t)$ частицы $\mathbf{R}_0^{x}$ является величиной неиндифферентной; этот очевидный факт зависимости траектории произвольной частицы от выбора системы отсчета известен из кинематики сплошной среды. С использованием аксиомы N3 можно показать, что **не только предыстория** $(\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^{x},t))^t$**, но и значения** $\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^{x},t)$ **не должны входить в качестве независимого аргумента в определяющее отображение.**

Таким образом, общий вид ОС для простого материала следующий:

$$\Sigma\,[\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^{x},t),t]=\mathbf{F}[(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}(\mathbf{R}_0^{x},\tau))^t,\theta^t,\underset{\sim}{\mathbf{X}}{}_{\alpha}^{t};\ \mathbf{R}_0^{x},t]. \qquad (13)$$

Заметим, что последнее соотношение не предполагает “однородности” материала в общем случае, т.е. ОС могут отличаться для различных материальных частиц исследуемой области.

В дальнейшем изложении полагается, что рассматриваемые материалы являются простыми. Кроме того, для упрощения записи далее будут опущены обозначения аргументов $(\mathbf{R}_0^{x},t)$ в левой и правой частях ОС.

Отметим, что при записи общего вида ОС не явным образом подразумевается выбор некоторой отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{K}$, по отношению к которой определяются деформирование и реакция материала. При изменении отсчетной конфигурации вид определяющего отображения в общем случае изменяется. В связи с этим используемая отсчетная конфигурация должна фигурировать в обозначении определяющего отображения (например, $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\cdot)$). Однако для упрощения записи здесь и далее будем вводить нижний индекс, обозначающий используемую отсчетную конфигурацию, при обозначении определяющего отображения лишь в случае необходимости.

В то же время сказанное выше не означает, что переход от одной отсчетной конфигурации к другой требует вновь осуществления всей процедуры установления ОС. Покажем это.

Пусть $\overset{\circ}{K}_1$, $\overset{\circ}{K}_2$ — две различные отсчетные конфигурации одной и той же материальной частицы с малой окрестностью; $\mathbf{p}$: $\overset{\circ}{K}_1 \to \overset{\circ}{K}_2$; градиент этого преобразования обозначим $\mathbf{P} = \overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla}\mathbf{p}$. Очевидно, что $\overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla}\mathbf{r} = \overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla}\mathbf{p} \cdot \overset{\overset{\circ}{K}_2}{\nabla}\mathbf{r} = \mathbf{P} \cdot \overset{\overset{\circ}{K}_2}{\nabla}\mathbf{r}$ $(\forall t)$. Реакцию простого материала для некоторой фиксированной частицы $\mathbf{R}'_0$ можно представить в виде

$$\sigma = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_1}(\overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla}\mathbf{r}^t) = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_1}(\mathbf{P} \cdot \overset{\overset{\circ}{K}_2}{\nabla}\mathbf{r}^t). \tag{14}$$

Вторую часть (14) можно рассматривать как реакцию материала по отношению к конфигурации $\overset{\circ}{K}_2$ на любую предысторию $(\overset{\overset{\circ}{K}_2}{\nabla}\mathbf{r})^t \overset{\text{об}}{=} (\mathbf{F}^T)^t$:

$$\sigma = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_2}((\mathbf{F}^T)^t) = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_1}(\mathbf{P} \cdot (\mathbf{F}^T)^t) \qquad \forall (\mathbf{F}^T)^t. \tag{15}$$

Следует иметь в виду, что в (14) рассматривается одна и та же предыстория движения $\mathbf{r}^t$, *однако записанная по отношению к различным отсчетным конфигурациям. Предыстории рассматриваются на всем интервале* $(-\infty, t]$; *при этом если конфигурации* $\overset{\circ}{K}_1$ *соответствует момент* t_{01}, *а конфигурации* $\overset{\circ}{K}_2$ — t_{02}, $t_{01} < t_{02}$, *то предыстория* $\overset{\overset{\circ}{K}_2}{\nabla}\mathbf{r}^t$ *охватывает и отрезок* $[t_{01}, t_{02}]$ *(и более ранние моменты времени).* В (15) $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_1}$, $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_2}$ — различные в общем случае определяющие отображения, однако описывающие реакцию одного и того же материала и дающие одинаковые значения напряжений $\forall t$.

Как отмечает А.И. Лурье [4, с. 90]: "Подобно этому отличаются друг от друга уравнения одной и той же кривой, записанные в разных системах координат".

Заметим, что не исключается и ситуация одинаковых реакций $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_1}$, $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_2}$ *в случае равноправности конфигураций* $\overset{\circ}{K}_1$ *и* $\overset{\circ}{K}_2$.

Из вышесказанного можно сделать следующий вывод.

Реакция простого материала, установленная для одной отсчетной конфигурации (например, $\overset{\circ}{K}_1$), однозначно определяет реакцию относительно любой другой конфигурации (например, $\overset{\circ}{K}_2$). Иначе говоря, факт **существования определяющего отображения не зависит от выбора отсчетной конфигурации.**

Общей форме ОС (13) можно поставить в соответствие определяющие соотношения, записанные в терминах отсчетной K_0 *или актуальной* K_t *конфигураций,*

$$\overset{\circ}{\Sigma}\,(\mathbf{R}_0,t) = \overset{\circ}{\mathbf{F}}\,[(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^t, \theta^t, \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}{}_{\alpha}^{t}], \tag{13$_1$}$$

$$\hat{\Sigma}\,(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{F}}\,[\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^t, \theta^t, \hat{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}{}_{\alpha}^{t}], \tag{13$_2$}$$

где $\overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{\alpha}$, $\hat{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{\alpha}$ *определяют однотипные воздействия, характеризуемые тензорными параметрами* $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{\alpha}$, *определенными соответственно в* K_0 *и* K_t*. При этом на меры напряженного состояния* $\overset{\circ}{\Sigma}$, $\hat{\Sigma}$, *тензоры* $\overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{\alpha}$, $\hat{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{\alpha}$ *можно наложить соответствующие требования независимости от системы отсчета (требование инвариантности по отношению к наложенному жесткому движению в* K_0 и *требование индифферентности в* K_t*). С учетом известных из МСС свойств мер напряженного состояния в качестве* $\overset{\circ}{\Sigma}$ *удобно использовать 2-й тензор Пиола-Кирхгоффа **K**, тогда (13$_1$) принимает вид*

$$\boldsymbol{K}\,(\mathbf{R}_0,t) = \overset{\circ}{\mathbf{F}}\,[(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^t, \theta^t, \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}{}_{\alpha}^{t}].$$

В терминах K_t *удобно в качестве* $\hat{\Sigma}$ *использовать тензор напряжений Коши* $\boldsymbol{\sigma}$, *имеющий ясно выраженный физический смысл и удовлетворяющий требованию индифферентности. В этом случае (13$_2$) можно записать в виде*

$$\sigma(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{F}}\,[\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^t, \theta^t, \hat{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}{}_{\alpha}^{t}]. \tag{16}$$

Заметим, что определение физических уравнений в случае сложных физико-механических воздействий (электромагнитных полей, радиации и т. д.) должно быть расширено включением в число параметров, описывающих реакцию материала, наряду с Σ *других характеристик.*

Несколько предваряя дальнейшее изложение, отметим, что история изменения конфигурации может быть описана (в рамках простого материала) историей изменения той или иной меры деформации, например, тензора деформации Коши-Грина **C**, *тогда соотношение (16) можно представить в виде*

$$\sigma(\mathbf{r},t)=\hat{\mathbf{F}}\,[\mathbf{C}^t,\theta^t,\overset{t}{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{X}}_\alpha}}]. \qquad (16')$$

Последнее соотношение можно трактовать как математическую запись ***постулата макроскопической определимости А.А. Ильюшина*** *[3]: для данного вещества макроскопическое состояние в точке* $\mathbf{R}_0^x$ *в момент* t *однозначно определяется историей физико-механических воздействий* $\mathbf{C}^t,\theta^t,\overset{t}{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{X}}_\alpha}}$ *на данную точку. Формулировка принципа в виде (16′) удовлетворяет аксиомам N1 и N2. Аксиома N3 удовлетворяется за счет специального определения оператора* $\hat{\mathbf{F}}$*, связанного с вмороженной лагранжевой системой координат. Таким образом, постулат макроскопической определимости можно считать для простого материала аналогом трех аксиом Нолла.*

Следует отметить, что аксиоматика У. Нолла и А.А. Ильюшина в значительной мере базируется на введенной функциональной форме ОС (вида (9) или (16′)). ОС в виде функционалов чаще встречаются в общей ТОС, однако имеют ограниченное применение в конкретных теориях сплошных сред (реологические теории, эндохронная теория пластичности и некоторые другие). При этом в неявной форме всегда предполагается существование конечного числа параметров, полностью характеризующих состояние исследуемой частицы в любой фиксированный момент времени. Вообще говоря, последнее не является очевидным фактом и должно быть принято в качестве исходного постулата в любой рациональной теории, претендующей на использование при решении конкретных задач.

На основе анализа известных подходов и физического описания процессов, изучаемых в современной механике сплошных сред, можно выдвинуть более сильную гипотезу:

Реакция материала в представительном объеме рассматриваемого масштабного уровня в каждый момент времени полностью определяется <u>значениями</u> тензорзначных термомеханических характеристик материала, конечного набора внутренних переменных, параметров физико-механических воздействий и их производных по времени требуемого порядка в исследуемый момент времени.

Набор внутренних параметров $\underset{\sim}{\mathbf{J}_\beta}$ $(\beta=1,\ldots,B)$ *характеризует состояние материала и “носителей” рассматриваемых механизмов физико-механического процесса (деформирования, течения) на более “глубоких” масштабных уровнях. Например, при рассмотрении упругопластического деформирования моно- и поликристаллов на макроуровне внутренние параметры характеризуют микроструктуру материала, дислокационную субструктуру и т. д. Указанные характеристики могут быть определены из моделей, описывающих поведение материала на меньших масштабных уровнях, или из (микро)экспериментов.*

Обозначая через $\underset{\sim}{\mathbf{P}}_\gamma$ $(\gamma = 1,\ldots,G)$ *совокупность термомеханических характеристик (меры напряженного и деформированного состояний, температура и т. д.) и параметров* $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_\alpha$, *определяющее соотношение рассматриваемого класса можно записать в виде*

$$\dot{\Sigma}(\mathbf{R}_0, t) = \mathbf{F}(\underset{\sim}{\mathbf{P}}_\gamma, \underset{\sim}{\mathbf{P}}_\gamma^{(1)}, \ldots, \underset{\sim}{\mathbf{P}}_\gamma^{(n)}, \underset{\sim}{\mathbf{J}}_\beta, \underset{\sim}{\mathbf{J}}_\beta^{(1)}, \ldots, \underset{\sim}{\mathbf{J}}_\beta^{(m)}). \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{F}(\cdot)$ — *тензорзначная (второго ранга)* ***функция*** *параметров* $\underset{\sim}{\mathbf{J}}_\beta$, $\underset{\sim}{\mathbf{P}}_\gamma$ *и их производных по времени в момент времени* t; *в общем случае область определения указанных параметров (по пространственной переменной) — все исследуемое тело* B.

Принимая введенную гипотезу в качестве постулата, в дальнейшем при построении аксиоматики можно оперировать соотношением (17), дополненным эволюционными уравнениями для внутренних переменных $\underset{\sim}{\mathbf{J}}_\beta$, *например, вида*

$$\dot{\underset{\sim}{\mathbf{J}}}_\beta(\mathbf{R}_0, t) = \underset{\sim}{\mathbf{f}}_\beta(\underset{\sim}{\mathbf{P}}_\gamma, \underset{\sim}{\mathbf{P}}_\gamma^{(1)}, \ldots, \underset{\sim}{\mathbf{P}}_\gamma^{(q)}, \underset{\sim}{\mathbf{J}}_\beta). \tag{18}$$

При этом $\underset{\sim}{\mathbf{f}}_\beta$ — *тензорзначная* ***функция*** *соответствующего ранга, аргументы которой определяются в исследуемый момент времени* t.

Введенная гипотеза согласуется с принципом детерминизма; отсутствуют противопоказания для ее совместного использования с аксиомами 2 и 3. В частности, при использовании принципа локальности в качестве аргументов в правых частях (17), (18) можно использовать значения параметров $\underset{\sim}{\mathbf{P}}_\gamma$, $\underset{\sim}{\mathbf{J}}_\beta$ *(и, возможно, градиентов части из них) и их производных в точке* $\mathbf{R}_0$ *в момент* t. *Использование принципа материальной индифферентности позволяет конкретизировать вид соотношений (17)-(18); в частности, может привести к необходимости замены материальных производных по времени теми или иными объективными производными.*

Предлагаемый общий вид ОС (17)-(18) представляется более удобным для последующего анализа и приложений, чем запись ОС в операторной форме (9). В частности, для соотношений (17)-(18) в полной мере могут быть использованы хорошо разработанные в тензорном анализе теория *тензорных функций тензорных аргументов, теория инвариантов и другие разделы.*

4. Примеры применения принципа индифферентности

Как уже отмечено выше, приведенные аксиомы играют важную конструктивную роль в установлении конкретного вида ОС. Особое место в этой связи занимает принцип независимости от системы отсчета [5], примеры использования которого рассматриваются в данном пункте.

1. Для упрощения рассуждений и преобразований используем ОС, описывающие реакцию материала (напряженное состояние) только на механическое движение (изменение конфигурации). В рамках модели простого материала в этом случае можно воспользоваться частным видом ОС, следующим из (16):

$$\sigma(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{F}}\ [\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t}]. \tag{19}$$

Докажем, что тензорзначная функция $\sigma(\mathbf{r},t)$ для простых материалов **определяется только предысторией левого тензора искажений $\mathbf{U}^{\mathbf{t}}$, предыстория поворотов не оказывает влияния на** $\sigma(\mathbf{r},t)$, в ОС могут входить только конечные повороты.

В силу индифферентности тензора напряжений Коши $\forall t, \forall \mathbf{r}\ \ \sigma^{*}(\mathbf{r}^{*},t) = \mathbf{O}^{T}(t)\cdot\sigma(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{O}(t)$ (для простоты полагается отсутствие сдвига по времени в системах ϕ и ϕ^{*}, $t=t^{*}$). В силу принципа независимости от системы отсчета имеем

$$\sigma^{*}(\mathbf{r}^{*},t) = \hat{\mathbf{F}}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{*t}) = \hat{\mathbf{F}}[(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\cdot\mathbf{O}(t))^{t}] = \mathbf{O}^{T}(t)\cdot\hat{\mathbf{F}}\ (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t})\cdot\mathbf{O}(t). \tag{20}$$

Введем полярное разложение градиента места $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ —ортогональный тензор, сопровождающий деформацию. Тогда из (20) следует

$$\hat{\mathbf{F}}[(\mathbf{U}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{O})^{t}] = \mathbf{O}^{T}(t)\cdot\hat{\mathbf{F}}\ (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t})\cdot\mathbf{O}(t).$$

Вышеприведенные соотношения выполняются $\forall\mathbf{O}\in O$. В частности, можно положить $\mathbf{O}(t)=\mathbf{R}^{T}(t)\ \forall t$. Иначе говоря, в качестве системы ϕ^{*} используется подвижная система, поворот которой описывается тензором ротации главных осей правой меры искажения $\mathbf{V}$ к главным осям левой меры искажения $\mathbf{U}$. *В терминах наложенного жесткого движения это означает, что поворот описывается тензором* $\mathbf{R}^{T}$. В этой подвижной системе

$$\sigma^{*}(\mathbf{r}^{*},t) = \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}^{t}). \tag{21}$$

Возвращаясь к исходной системе отсчета ϕ, получаем

$$\sigma(\mathbf{r},t) = \mathbf{R}^{T}(t)\cdot\sigma^{*}(\mathbf{r}^{*},t)\cdot\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^{T}(t)\cdot\hat{\mathbf{F}}\ (\mathbf{U}^{t})\cdot\mathbf{R}(t). \tag{22}$$

Последнее соотношение называется ***приведенной формой ОС***. Согласно (22) история прошлых поворотов не сказывается на определяющем отображении, повороты могут входить в ОС лишь своими значениями в текущий момент времени. От введенной подвижной системы ϕ^{*} можно перейти и к любой другой ϕ_1, поворот которой описывается тензорзначной функцией, $\forall t\ \mathbf{O}_1(t)\in O$. Аргумент в правой части (21) при этом не изменится, т.к. $\mathbf{U}$ является инвариантной по отношению к наложенному жесткому движению мерой деформации. Следовательно, в силу индифферентности тензора напряжений Коши для любой системы отсчета ϕ_1, жесткий поворот которой к системе ϕ^{*} описывается тензорзначной функцией $\mathbf{O}_1(t)$, имеем

$$\sigma(\mathbf{r},t) = \mathbf{O}_1^{T}(t)\cdot\sigma^{*}(\mathbf{r}^{*},t)\cdot\mathbf{O}_1(t) = \mathbf{O}_1^{T}(t)\cdot\hat{\mathbf{F}}\ (\mathbf{U}^{t})\cdot\mathbf{O}_1(t), \tag{23}$$

что и доказывает требуемое утверждение.

Приведенная форма ОС позволяет существенно упростить построение конкретных физических уравнений. Действительно, в этом случае следует установить функциональную зависимость σ от предысторий только “чистого” деформирования $\mathbf{U}^{t}$ (при $\mathbf{R}^{t} = \mathbf{E}$), откуда с использованием (23) можно перейти к ОС с любой предысторией деформации. Следует отметить, что существуют и другие приведенные формы ОС.

Подчеркнем, что история “чистой” деформации $\mathbf{U}^{t}$ *представляет собой не только историю изменения растяжений-сжатий вдоль фиксированных материальных волокон, совпадающих с главными осями меры* $\mathbf{U}$ *для любого момента времени. В историю* $\mathbf{U}^{t}$ *входит и история поворотов главных векторов меры* $\mathbf{U}$ *относительно материальных волокон. В связи с вышесказанным не следует воспринимать термин “чистая” деформация буквально, иначе необходимо было бы рассматривать лишь узкий класс процессов деформирования (растяжений-сжатий вдоль трех взаимно перпендикулярных фиксированных материальных волокон).*

В предположении отсутствия памяти и зависимости от времени (склерономности) материала приходим к модели материала, ***называемого упругим***. В соответствии с полученным результатом приведенная форма ОС такого материала имеет вид

$$\sigma(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{F}}\ (\mathbf{U}). \tag{24}$$

2. В МСС часто возникает проблема построения ОС для случая геометрической нелинейности (больших градиентов перемещений). В настоящее время ее решение часто осуществляется обобщением известных “геометрически линейных” ОС. В качестве примера рассмотрим обобщение ОС Максвелла на случай больших градиентов перемещений. Определяющие соотношения Максвелла имеют вид

$$\sigma + \lambda\dot{\sigma} = 2\mu\mathbf{D}, \qquad (25)$$

где $\mathbf{D}$ — тензор деформации скорости, λ, μ — индифферентные скалярные характеристики материала, $\lambda^{*}=\lambda$, $\mu^{*}=\mu$. Наличие производной $\dot{\sigma}$ тензора напряжений Коши в левой части уравнения приводит к нарушению требования индифферентности ОС (25). Действительно, в соответствии с требованием индифферентности (аксиомой N3) вид уравнения не должен меняться при замене системы отсчета (или наложении жесткого движения). Тогда из (25) должно следовать

$$\sigma^{*} + \lambda^{*}\dot{\sigma}^{*} = 2\mu^{*}\mathbf{D}^{*}.$$

Учитывая, что $\sigma^{*} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \sigma \cdot \mathbf{O}$, $\mathbf{D}^{*} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}$, дифференцируя σ^{*} по времени и подставляя в последнее соотношение, получаем

$$\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot [\sigma + \lambda(\dot{\sigma} + \mathrm{O} \cdot \dot{\mathrm{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \sigma + \sigma \cdot \dot{\mathrm{O}} \cdot \mathrm{O}^{\mathrm{T}})] - 2\mu\mathbf{D}] \cdot \mathbf{O} = \mathbf{0},$$

откуда следует (в силу произвольности $\mathbf{O}$)

$$\sigma + \lambda(\dot{\sigma} + \mathrm{O} \cdot \dot{\mathrm{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \sigma + \sigma \cdot \dot{\mathrm{O}} \cdot \mathrm{O}^{\mathrm{T}}) = 2\mu\mathbf{D}.$$

Последнее соотношение, как нетрудно видеть, не совпадает по виду с ОС (25). Причина кроется **в неиндифферентности производной** $\dot{\sigma}$ (несмотря на индифферентность σ).

Выход из данной ситуации обычно заключается в замене материальной производной $\dot{\sigma}$ на коротационную или конвективную производную σ^{r}. В этом случае определяющее соотношение (25) имеет вид

$$\sigma + \lambda\sigma^{\mathrm{r}} = 2\mu\mathbf{D}. \qquad (26)$$

При малых квазижестких поворотах (и малых скоростях этих поворотов) соотношение (26) сводится к (25). Возникающая при таком подходе к обобщению ОС неединственность выбора независимых от системы отсчета мер скоростей напряжений, деформаций и других параметров разрешается с привлечением дополнительных гипотез и физического анализа.

Следует отметить сложность и важность решения данного вопроса, поскольку физически необоснованный выбор объективных производных может привести к качественно неверным результатам, зачастую трудно выявляемым на предварительной стадии оценки модели. При этом самым сложным является вопрос определения "движения без жесткого вращения" сплошной среды. Данный вопрос в исследованиях по нелинейной механике часто подменяется проблемой независимости ОС от выбора системы отсчета. Конечно, последнее требование должно быть выполнено; как показано выше, осуществить его выполнение достаточно просто. Однако это не снимает вопроса о выборе меры поворота при обобщениях геометрически линейных соотношений на случай больших градиентов перемещений. Дейст-

вительно, в общем случае движения деформируемой среды невозможно выделить тройку некомпланарных материальных волокон, сохраняющих свою взаимную ориентацию в течение всего исследуемого процесса движения. (При наличии такой тройки меру поворота тройки единичных векторов вдоль выбранных материальных волокон можно с полным основанием считать мерой жесткого поворота). При произвольном движении деформируемой среды любая выбранная тройка волокон испытывает изменение углов между ними.

В связи с этим в нелинейной механике часто применяется понятие квазитвердого движения, вводимого для ***принятого представления движения среды совокупностью квазитвердого и деформационного движений.*** *Именно мера последнего вводится в определяющее соотношение как эквивалент меры деформаций в геометрически линейном ОС. Ортогональная тензорзначная функция, характеризующая поворот в квазитвердом движении, используется затем при определении коротационных производных. Заметим, что данный подход тоже не может претендовать на единственность. Однако в любом случае введение мер квазитвердого движения, способа обобщения геометрически линейного ОС на случай больших градиентов перемещением, анализ принимаемых при этом гипотез должны предшествовать экспериментальным исследованиям и лежать в основе программы экспериментов, учитываться при интерпретации и обработке опытных данных.*

Следует отметить также продуктивность применения численных экспериментов на простых модельных задачах, особенно — для "отсеивания" ОС, приводящих к физически нереальным результатам.

3. Рассмотрим достаточно широкий класс ОС жидкостей, не обладающих памятью. Из общих соображений в число аргументов определяющего отображения **F** в этом случае могут входить: текущая конфигурация **r**, скорость перемещений $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, плотность в текущей конфигурации $\hat{\rho}$, градиент скорости перемещений $\hat{\nabla}\mathbf{v}$. Последний может быть представлен суммой тензоров деформации скорости **D** и вихря **W**, $\hat{\nabla}\mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$. Таким образом, общий вид ОС в этом случае следующий:

$$\sigma = \hat{\mathbf{F}}\,(\hat{\rho}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{D}, \mathbf{W}). \tag{27}$$

Применим принцип независимости от системы отсчета для устранения физически неприемлемых ОС. Ранее уже указано, что радиус-вектор частиц тела не может входить в качестве независимого аргумента в ОС, поэтому в дальнейшем **r** исключаем из числа аргументов. В соответствии с аксиомой N3 имеем

$$\sigma^* = \hat{\mathbf{F}}\,(\hat{\rho}^*, \dot{\mathbf{r}}^*, \mathbf{D}^*, \mathbf{W}^*) = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\mathbf{F}}\,(\hat{\rho}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{D}, \mathbf{W}) \cdot \mathbf{O}. \tag{28}$$

Из кинематических соотношений известно (в предположении $\mathbf{r_0}=\mathbf{0}$):

$$\dot{\mathbf{r}}^* = \dot{\mathbf{r}}_0^* + \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad \hat{\rho}^* = \hat{\rho},$$
$$\mathbf{D}^* = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}, \;\; \mathbf{W}^* = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{O} + \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}.$$

Подставляя последние соотношения в (28), получаем

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}}(\hat{\rho}, \dot{\mathbf{r}}_0^* + \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}, \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{O} + \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}) &= \\ = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\mathbf{F}}(\hat{\rho}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{D}, \mathbf{W}) \cdot \mathbf{O}&. \end{aligned} \tag{29}$$

Соотношение (29) справедливо $\forall \mathbf{O}(t) \in \mathrm{O}$. Полагаем вначале $\mathbf{O}=\mathbf{E}$, $\dot{\mathbf{O}} = \mathbf{0}$, т.е. принимаем, что системы отсчета ϕ и ϕ^* движутся друг относительно друга поступательно. *Иначе говоря, наложенное жесткое движение является поступательным.* Тогда из (29) следует равенство

$$\hat{\mathbf{F}}(\hat{\rho}, \dot{\mathbf{r}}_0^* + \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{D}, \mathbf{W}) = \hat{\mathbf{F}}(\hat{\rho}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{D}, \mathbf{W}),$$

которое должно быть справедливо при любом выборе $\mathbf{r}_0^*$ (а следовательно, в силу произвольности поступательных движений, $\forall \dot{\mathbf{r}}_0^*$). Из ясно видимого противоречия в последнем соотношении вытекает, что $\dot{\mathbf{r}}$ не может входить аргументом в ОС.

Полагаем далее $\mathbf{O}=\mathbf{E}$, $\dot{\mathbf{O}} \neq \mathbf{0}$, тогда из (29) получаем равенство

$$\hat{\mathbf{F}}(\hat{\rho}, \mathbf{D}, \mathbf{W} + \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}}) = \hat{\mathbf{F}}(\hat{\rho}, \mathbf{D}, \mathbf{W}),$$

которое должно выполняться $\forall \dot{\mathbf{O}}$. В силу очевидного противоречия приходим к выводу об отсутствии $\mathbf{W}$ в ОС в качестве аргумента. Тогда окончательно получаем, что ОС жидкости с бесконечно малой памятью имеют вид

$$\sigma = \hat{\mathbf{F}}(\hat{\rho}, \mathbf{D}). \tag{30}$$

Отметим, что в данном случае отсутствует функциональная зависимость, оператор $\hat{\mathbf{F}}$ представляет собой тензорзначную функцию. При этом

$$\sigma^* = \hat{\mathbf{F}}(\hat{\rho}^*, \mathbf{D}^*) = \hat{\mathbf{F}}(\hat{\rho}^*, \mathbf{O} \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{O}) = \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{F}}(\hat{\rho}, \mathbf{D}) \cdot \mathbf{O},$$

что отвечает известному определению изотропной тензорной функции. Следовательно, для рассматриваемого случая определяющее отображение $\hat{\mathbf{F}}$ в (30) представляет собой изотропную тензорзначную функцию скалярного и тензорного аргументов.

Приведем некоторые замечания, относящиеся к классу простых материалов.

5. Об однородных деформациях простого материала

В соответствии с определением простого материала напряженное состояние в каждой точке тела определяется только предысторией изменения $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}$ (при отсутствии отличных от изменения конфигурации воздействий).

Из кинематики известно, что с помощью градиента места осуществляется аффинное преобразование бесконечно малой окрестности исследуемой частицы. Предположим, что изменение конфигурации некоторого исследуемого тела M таковы, что материальные отрезки прямых в K_0 в каждый момент времени t переходят также в отрезки прямых. Такая деформация тела M называется ***однородной***. Очевидно, что однородная деформация представляет собой аффинное преобразование $K_0(M)$ в $K_t(M)$. Последнее может быть описано следующим соотношением:

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}_0,t) = \mathbf{r}_p(t) + (\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_{0p}) \cdot (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r})(t), \tag{31}$$

где запись $(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r})(t)$ подчеркивает, что градиент места в каждый момент t одинаков для всякого тела M. Последнее обусловливает появление термина “однородная деформация”.

С учетом вышесказанного каждой частице исходного тела B (вместе с малой ее окрестностью) можно поставить в соответствие тело M, испытывающее однородную деформацию. Таким образом, **все возможные предыстории деформации произвольной частицы x тела** B **(с малой окрестностью) исчерпываются предысториями однородной деформации тела** M. Предполагая материал тела идентичным материалу исследуемой частицы x (с малой окрестностью) тела B, ***тело*** M ***можно назвать модельным для частицы*** $x \in B$**.**

Понятие однородной деформации чрезвычайно широко используется при установлении определяющих соотношений, в особенности — в экспериментальных исследованиях. *При этом предполагается (хотя, вероятно, не всегда осознанно), что исследуемый материал каждой точки (с малой окрестностью) рассматриваемого реального тела может быть с достаточной точностью описан моделью простого материала. Действительно, если материал не является простым, то в качестве аргументов в определяющем отображении, наряду с* $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^t$, *фигурируют* $\overset{\circ}{\nabla}\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^t$ *и истории градиентов более высоких порядков. Тогда для модельного тела может быть реализован лишь узкий подкласс историй нагружения с нетривиальным первым градиентом* $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^t$, *второй и последующие градиенты места являются нулевыми* $\forall t$. *Переопределение понятия модельного тела для включения в рассмотрение тел второго и более высокого порядков выдвигает на первый план практически неразрешимую (на сегодняшний день) проблему измеримости. При этом для реализации программ деформирования (нагружения) и при обработке экспериментальных данных потребуется определение и реализация граничных условий для градиентов (первого и более высоких порядков) перемещений. Воз-*

можно, обозначенная сложность может быть устранена путем введения иерархической системы модельных тел. [Для исходного материала порядка n *вводится модельное тело порядка* n, M_n *(с постоянным градиентом* n*-го порядка); далее модельное тело* M_n *представляется совокупностью тел* P_{n-1} *с размерами, в которых изменениями градиентов* (n-1)*-го порядка можно пренебречь; каждому из тел* P_{n-1} *ставятся в соответствие модельные тела* M_{n-1} *и т. д.]. Однако при этом возникает необходимость учета масштабного фактора, выполнения условий подобия, требующая отдельного рассмотрения.*

Для краткости в дальнейшем модельное тело частицы x *исходного тела* B *будем называть* ***x-модельным телом*** *(по аналогии с введенным А.А. Ильюшиным понятием* M*-образца).*

Достаточно детально рассматриваемый вопрос освещен в монографии А.А. Ильюшина [2]. Им введено понятие M*-образца частицы* M *(с окрестностью объемом* ΔV*) как тела конечных размеров, вещество которого в отсчетный момент времени идентично веществу частицы* M *с окрестностью. При этом предполагается [2, с. 89]:*

"1) напряженное и деформированное состояние образца является однородным по объему в любой момент времени;

2) любой процесс изменения тензора деформаций во времени (или тензора напряжений) может быть осуществлен;

3) проникающие действия типа тепловых и массовых потоков через границу образца могут быть осуществлены и, как и в объеме ΔV*, переносимые через границу образца субстанции достаточно однородно распределены внутри образца в любой момент времени".*

Нетрудно видеть, что понятие M*-образца аналогично понятию модельного тела (с учетом определения физико-механического процесса).*

В опытах, производимых на M*-образцах и называемых* M*-опытами, может быть реализовано любое напряженно-деформированное (однородное) состояние, причем деформации и напряжения вычисляемы по перемещениям границ образца и нагрузкам на поверхности.*

С использованием приведенных выше понятий А.А. Ильюшиным сформулирована так ***называемая гипотеза макрофизической определимости*** *[2]:*

"Если M*-образец в указанном выше смысле может быть реализован, то на нем в* M*-опытах в принципе могут быть изучены все возможные состояния и процессы, которые могут возникать в любом достаточно большом объеме произвольно нагружаемого тела произвольной формы при неоднородных состояниях. Иначе говоря, состояние вещества в объеме исходного тела может воспроизводиться в* M*-опытах". По существу, только такие тела и только такие процессы являются объектами исследования МСС и ТОС.*

6. Об естественной конфигурации

Понятие естественной конфигурации широко используется как в теории, так и в практических приложениях МСС. Особенно важную роль играет это понятие в ТОС, где существование естественной конфигурации (явно или неявно вводимое) эксплуатируется во всех теориях.

В соответствии с известным определением [5], материальная частица x (с малой окрестностью) полагается находящейся **в естественной конфигурации X_0, если напряжения в ней обращаются в нулевые при условии, что малая окрестность частицы x покоилась и покоится в состоянии X_0 во все времена в прошлом и настоящем.** При необходимости данное определение может быть расширено на более широкий класс воздействий. С учетом справедливого для широкого класса материалов свойства затухающей памяти, о котором будет говориться в дальнейшем, "бесконечное прошлое" в определении может быть заменено "физически бесконечным прошлым". Иначе говоря, постоянство конфигурации требуется реализовать на некотором конечном интервале "прошлого" (до настоящего момента).

Заметим, что в определении ничего не говорится о "недеформированности" состояния X_0, фигурирующего в большинстве определений так называемого естественного состояния (в некотором смысле аналога вводимого понятия). Об этом просто отсутствуют данные. В приведенном определении говорится о неизменной конфигурации, сохранившейся в течении длительного времени (достаточного для протекания релаксационных процессов).

Неявным образом в частице x *вместе с малой окрестностью подразумевается наличие однородных полей напряжений и деформаций. В реальных телах создание однородных тривиальных полей напряжений без разрушения тела в ряде случаев невозможно (без привлечения специальных методов термомеханической обработки). В связи с данным обстоятельством естественным представляется использование понятия* x*-модельного тела. Для* x*-модельного тела естественная конфигурация* X_0^x *определяется как получаемая из исходной аффинным преобразованием до исчезновения нагрузок на всех поверхностях модельного тела, при условии, что сохраняемой в течении длительного времени конфигурации* X_0^x *будут в течение всего этого времени отвечать нулевые поверхностные нагрузки. Затем от* X_0^x *можно перейти к естественной конфигурации частицы* x *с малой окрестностью. Естественно, такие переходы для частицы x с малой окрестностью и ее "соседей" (также с малыми окрестностями) могут привести к наложениям локальных естественных конфигураций или к образованиям пустот. Иначе говоря, естественная конфигурация произвольной частицы* x *(с малой окрестностью) в общем случае является несовместной. Но требование совместности и не вкладывается в определение* X_0*. В общем случае для произвольной частицы* x *естест-*

венная конфигурация X_0 *является фиктивной (но реализуемой для* x*-модельного тела).*

При наличии иных, отличных от чисто механических воздействий, в определение должны входить их фиксированные предыстории. В этом случае требуется, чтобы рассматриваемая частица находилась в равновесии (в широком смысле) при фиксированных состояниях воздействий в прошлом и настоящем. При этом возникает неоднозначность выбора естественной конфигурации. Действительно, при термомеханических воздействиях можно ввести различные конфигурации частицы тела x *(или* x*-модельного тела), свободные от напряжений при фиксированных (но отличающихся) температурах. Указанная неединственность устраняется, как правило, на уровне соглашения: принимаются фиксированные значения параметров воздействия* $(\theta, \underset{\sim}{\mathbf{X}_\alpha})$*, для которых при неизменной конфигурации напряжения являются нулевыми. Указанные внешние (по отношению к частице* x *или* x*-модельному телу характеристики окружающей среды будем в дальнейшем называть* ***"естественными условиями".*** *Выбор естественных условий во многих случаях определяется характерными для исследуемого процесса значениями параметров воздействия. Так, для значительного числа исследуемых прикладных проблем МСС в качестве естественных могут быть приняты: комнатная температура (*θ*=293 К), отсутствие иных (кроме термомеханических) воздействий (т. е. равенство нулевым соответствующих тензорзначных параметров), атмосферное давление. Отметим, что для твердых тел атмосферным давлением, как правило, можно пренебречь; для жидкостей и газов желательно переопределение естественной конфигурации (введение ее для тензора напряжений, равного шаровому, со средним значением, совпадающим с атмосферным давлением). Напряженное состояние, которое целесообразно выбрать в качестве отсчетного для данного материала, будем в дальнейшем называть естественным (напряженным состоянием).*

В дальнейшем отсчет всех параметров состояния в большинстве случаев ведется от соответствующих значений при естественных условиях, в естественной конфигурации. Заметим, что, как правило, естественная конфигурация принимается в качестве отсчетной при установлении ОС.

Таким образом, ***в дальнейшем под естественной конфигурацией частицы* x *с малой* ε*-окрестностью (или* x*-модельного тела) будет пониматься конфигурация* X_0^x*, напряженное состояние в которой является естественным при условии отсутствия деформационного движения и неизменности внешних условий, совпадающих с принятыми естественными условиями, во все времена в прошлом и настоящем.***

Ранее не рассматривалась отдельно явная зависимость реакции материала от времени. В то же время очевидно, что вид этой зависимости (см. (9) и далее) не отвечает условию независимости от выбора системы отсчета. В связи с этим ОС нуждаются в коррекции. Примем, что мас-

штабы времени в системах ϕ *и* ϕ^* *одинаковы (или могут быть приведены к одной шкале). Обозначим через* t_0 *момент времени в системе* ϕ, *соответствующий началу отклонения от естественных условий (хотя бы по одному из параметров воздействия) и естественной конфигурации в какой-либо точке тела* B. *В системе* ϕ^* *моменту* t_0 *отвечает момент времени* t_0^*. *Тогда замена последнего аргумента в (9) на* $(t - t_0)$ *делает ОС инвариантными к сдвигу точки отсчета времени. Заметим, что в большинстве работ, посвященных формулировке ОС тех или иных процессов, приведенная корректировка ОС осуществляется неявным образом (за счет вида зависимости отклика материала от времени, введения параметров нагружения взамен времени и т. д.). Следует отметить, что использование в качестве исходных ОС вида (17)-(18) снимает вопрос о независимости замены системы отсчета по временной координате.*

Предполагая существование естественной конфигурации для рассматриваемого материала, в дальнейшем будем отождествлять ее с отсчетной. Принимая, что $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^t = \mathbf{E}^t$, т. е. история деформирования такова, что $\forall t \;\; \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r} = \mathbf{E}$, согласно определению получаем

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{E}^t) = \mathbf{0}. \qquad (32)$$

В силу принципа независимости от системы отсчета имеем

$$\hat{\mathbf{F}}[(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\cdot\mathbf{O})^t] = \mathbf{O}^T(t)\cdot\hat{\mathbf{F}}[(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r})^t]\cdot\mathbf{O}(t),$$

а тогда из (32) следует:

$$\hat{\mathbf{F}}[\mathbf{O}^t] = \mathbf{0}.$$

Таким образом, любой поворот, постоянный или с произвольной историей, переводит одну естественную конфигурацию в другую. Подчеркнем, что это не означает, что все естественные конфигурации получаются из одной только жестким поворотом и трансляцией. Для произвольной частицы с малой окрестностью в ряде случаев можно определить множество естественных конфигураций, отличающихся друг от друга искажениями углов и изменениями длин выбранной тройки материальных волокон.

7. Материалы со связями

В предшествующем изложении полагалось, что под действием некоторых сил материал может испытывать в общем случае произвольные деформации. Однако в ряде случаев с учетом особенностей физического строения исследуемого материала на класс допустимых деформаций накладываются определенные ограничения. Эти априорные ограничения на допустимые деформации называются ***внутренними связями***.

Простая связь выражается соотношением:

$$\gamma(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{33}$$

где γ — не зависящая от системы отсчета скалярная функция.

Аналогично полученному в первом примере п. 4 результату, можно показать, что в силу независимости функции $\gamma(\cdot)$ от выбора системы отсчета в уравнение связи входит только тензор искажения или определяемые по нему тензоры, т.е. $\gamma(\mathbf{U}) = 0$ или $\lambda(\mathbf{C}) = 0$ (λ также не зависит от выбора системы отсчета, но отличается от функции γ). Каждое из приведенных уравнений может быть записано в скоростной форме дифференцированием по времени соответствующих соотношений (с добавлением необходимых начальных условий). Например, соотношение $\gamma(\mathbf{U}) = 0$ (в предположении дифференцируемости функции $\gamma(\cdot)$) эквивалентно совокупности дифференциального соотношения и начального условия:

$$\frac{\partial\gamma(\mathbf{U})}{\partial\mathbf{U}}:\dot{\mathbf{U}} = 0, \quad \gamma(\mathbf{U}|_{t=t_0}) = 0. \tag{34}$$

При этом по определению связи полагаются неизменными во времени, т.е. вид функции γ одинаков $\forall$t. Иными словами, связи не допускают определенных деформаций для частицы x с малой окрестностью (или для x-модельного тела), каковы бы ни были приложенные силы и движения исследуемой частицы. Следовательно, и реакции связи зависят не только от движений исследуемой среды, то есть, в частности, **напряжения**, возникающие в теле с простыми связями **не могут быть полностью определены ни движением в данный момент времени, ни его предысторией.** Из вышесказанного следует необходимость трансформации аксиомы N1 (принципа детерминизма), причем данная модификация не может следовать из аксиомы N1.

Отметим, что по аналогии с классической механикой связи могут быть заменены эквивалентной по действию системой сил — реакций связи. Именно в таком смысле далее будем употреблять термины "связи, осуществляемые системой сил", "напряжения, реализующие связи".

Из классической механики известно, что одним и тем же движениям могут отвечать различные реакции связей — последние определяются системой действующих сил. Аналогичная ситуация возникает и в МСС, где одним и тем же движениям сплошной среды при заданных связях могут отвечать различные напряжения, осуществляющие связи.

Простейшей системой напряжений, осуществляющих связи, являются такие, работа которых на любых движениях, совместимых со связями, равна нулю. По существу, подобный вид связей является аналогом идеальных связей в классической механике. В дальнейшем ограничимся рассмотрением "идеальных связей"; напряжения, осуществляющие связи, являются произвольными в том смысле, что они не определяются предысторией движения.

Несмотря на кажущуюся узость класса подобных "идеальных связей", он охватывает большинство известных в МСС случаев материалов со связями, несколько примеров будет приведено ниже. В ситуациях с "неидеальными связями" приходится отказываться от рассмотрения материалов со связями, что ведет к усложнению модели материала в целом (например, переход к гетерогенным средам, взаимодействующим по поверхностям контакта).

Для рассматриваемого класса связей формулируется **принцип (аксиома) детерминизма для простых материалов со связями.**

Аксиома N1c [5].

Напряжения определяются предысторией движения лишь с точностью до произвольного тензора, не совершающего работы ни при каком движении, совместимом со связями,

$$\sigma(x,t) = \mathbf{P}(x,t) + \hat{\mathbf{F}}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t};x,t), \tag{35}$$

где P — (индифферентный) симметричный тензор напряжений, для которого мощность напряжений равна нулю при любом движении, совместимом со связями; при этом определяющее отображение $\hat{\mathbf{F}}$ определено только на классе градиентов места, совместимых со связями.

Разность (σ - **P**) называется ***тензором определяющих напряжений.*** В случае отсутствия связей тензор **P** равен нулевому тензору, ограничение на историю $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t}$ снимается, и тогда из аксиомы N1c следует аксиома N1 (для простых материалов). Иначе говоря, для простых материалов аксиома N1c является обобщением аксиомы N1.

Введение понятия связей и новая формулировка принципа детерминизма привносит, на первый взгляд, дополнительные трудности, поскольку тензор напряжений теперь не определяется однозначно историей деформации.

По этой причине самым простым вариантом представляется отказ от понятия связей и сопряженных с этим сложностей, формулировка определяющих соотношений для материалов без связей, внесение затем ограничений на класс процессов деформирования и трансформация тем или иным способом полученных ОС. Однако, во-первых, неоднозначность определения тензора напряжений проявляется независимо от появления или отсутствия понятия связей и определяется физическим строением исследуемого материала; привнесенные понятия и аксиома N1c есть лишь обобщение известных экспериментальных фактов (из гидродинамики, теоретической механики и т.д.). Во-вторых, сужается класс воздействий (деформаций) и класс тензоров отклика (определяющих напряжений); например, функционал $\hat{\mathbf{F}}$ *для несжимаемых сред следует устанавливать только для составляющих меры напряжений, ответственных за формоизменение (без гидростатиче-*

ских составляющих). Наконец, ниже будет показано, что для класса “идеальных связей” можно построить достаточно общий алгоритм определения вида тензора **P**.

Таким образом, возникшая в связи с введением новых понятий проблема состоит в определении (вида) тензора **P**. Для рассматриваемого класса “идеальных связей” мощность напряжений **P** на любых допустимых деформациях скорости должна быть равна нулю, т. е.

$$\mathrm{N}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}:\mathbf{D} = \mathrm{tr}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}) = 0. \qquad (36)$$

Воспользуемся уравнением связи в скоростной форме (34), переписанном в виде $\partial_{\mathbf{U}}\gamma(\mathbf{U}):\dot{\mathbf{U}} = \mathrm{tr}(\partial_{\mathbf{U}}\gamma(\mathbf{U})\cdot\dot{\mathbf{U}}) = 0$. Используя кинематические соотношения, трансформируем последнее уравнение

$$\mathbf{U} = \overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{\mathbf{G}}^{-\frac{1}{2}}\cdot\dot{\overset{\circ}{\mathbf{G}}} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\overset{\circ}{\mathbf{G}}},$$

$$\dot{\overset{\circ}{\mathbf{G}}} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\cdot\hat{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\cdot\hat{\nabla}\mathbf{v}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} =$$

$$= 2\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\cdot[\frac{1}{2}(\hat{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \hat{\nabla}\mathbf{v})]\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} = 2\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\cdot\mathbf{D}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}},$$

где использованы соотношения

$$\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\cdot\hat{\nabla}\mathbf{v}, \qquad \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \hat{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\cdot\mathbf{D}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}.$$

Уравнение связи принимает вид

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}(\partial_{\mathbf{U}}\gamma(\mathbf{U})\cdot\dot{\mathbf{U}}) = (\partial_{\mathbf{U}}\gamma(\mathbf{U})\cdot\dot{\mathbf{U}}):\mathbf{E} = (\partial_{\mathbf{U}}\gamma(\mathbf{U})\cdot\mathbf{U}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\cdot\mathbf{D}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}):\mathbf{E} =\\ &= [\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\cdot(\partial_{\mathbf{U}}\gamma(\mathbf{U}))\cdot\mathbf{U}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\cdot\mathbf{D}\cdot]:\mathbf{E} = \\ &= [\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\cdot(\partial_{\mathbf{U}}\gamma(\mathbf{U}))\cdot\mathbf{U}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}]:\mathbf{D} = 0.\end{aligned} \qquad (37)$$

Если $\gamma(\cdot)$ — изотропная тензорная функция, то $\partial_{\mathbf{U}}\gamma(\mathbf{U})\cdot\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\cdot\partial_{\mathbf{U}}\gamma(\mathbf{U})$ и тензор второго ранга в квадратных скобках в (37) $\mathbf{B} \equiv \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\cdot\partial_{\mathbf{U}}\gamma(\mathbf{U})\cdot\mathbf{U}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r})$ — симметричный. В противном случае под **B** следует понимать симметричную часть данного выражения.

Как известно, пространству симметричных тензоров 2-го ранга можно поставить в соответствие шестимерное векторное пространство $\Re^6$; *операции двойного скалярного произведения в тензорном пространстве* *будет соответствовать операция скалярного произведения в* $\Re^6$. *Указанное соответствие является изоморфизмом евклидовых пространств. Можно показать в частности, что для любых двух симметричных тензоров* **A** *и* **B** *и их образов* **a**, **b** *в* $\Re^6$ *из условий* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ *следуют соответственно* $\mathbf{A}:\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{B}$, *и наоборот. Обозначим через* **d**, **p**, $\mathbf{b} \in \Re^6$ *векторы, соответствующие тензору деформации скорости* **D**, *тензору напряжений* **P** *и тензору* **B**. *С учетом этих обозначений и сделанных выше замечаний соотношения (36)-(37) можно записать в форме*

$$\mathrm{N}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{d} = 0, \tag{36$'$}$$

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{d} = 0. \tag{37$'$}$$

Следует подчеркнуть, что **p** *и* **b** $\forall \mathrm{t}$ *являются постоянными и не зависят от скоростей деформаций;* **d** *в (36′) и (37′) принимает значение из множества допустимых (совместимых со связями) скоростей деформаций. При этом из (37) следует, что* $\forall \mathrm{t}$ *множество допустимых скоростей деформаций является линейным подпространством. Тогда соотношения (36′) и (37′) представляют собой уравнения гиперплоскости (одной и той же), и*

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{b}. \tag{38}$$

С учетом сказанного выше из (37),(38) получаем

$$\mathbf{P} = \alpha(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \partial_{\mathbf{U}}\gamma(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}), \tag{39}$$

где α — произвольный (индифферентный) скаляр. Таким образом, получено общее решение уравнения (36); тензор **B** играет роль “направляющего тензора”, α определяется из дополнительных условий (чаще всего — граничных).

В случае наличия нескольких связей, определяемых уравнениями $\gamma^{\mathrm{i}}(\mathbf{U})=0$, $\mathrm{i}=1,...,\mathrm{I}$, аналогичным образом можно показать

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{i}}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \partial_{\mathbf{U}}\gamma^{\mathrm{i}}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}).$$

Подставляя (39) в (35), получаем определяющее соотношение для простого материала с простой “идеальной связью”.

Заметим, что приведенные выше соотношения устанавливаются для каждой частицы с малой ε*-окрестностью, при этом вид уравнения связи и полученное выражение* **P** *обычно полагаются одинаковыми для всех частиц исследуемого тела. Кроме того, обычно предполагается, что* α *в (39) являются гладкими полями* $\alpha(\mathbf{r},\mathrm{t})$ *в* $\mathrm{K_t}$.

Рассмотрим некоторые примеры простых связей.

1. Несжимаемый материал. Материал называется несжимаемым, если он может совершать только изохорические движения. Уравнение связи в данном случае имеет вид

$$\gamma(\mathbf{U}) = \det\mathbf{U} - 1 = 0. \qquad (40)$$

Определим $\partial\gamma/\partial\mathbf{U}$, воспользовавшись представлением $\mathbf{U}$ в главных осях

$$\frac{\partial\gamma(\mathbf{U})}{\partial\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(U_1U_2U_3)}{\partial U_i}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^i = U_2U_3\overset{\circ}{\mathbf{p}}_1\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^1 + U_1U_3\overset{\circ}{\mathbf{p}}_2\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^2 + U_1U_2\overset{\circ}{\mathbf{p}}_3\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^3 =$$

$$= (U_1U_2U_3)(U_1^{-1}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_1\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^1 + U_2^{-1}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_2\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^2 + U_3^{-1}\overset{\circ}{\mathbf{p}}_3\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^3) = \det(\mathbf{U})\mathbf{U}^{-1}.$$

Тогда получаем из (39)

$$\mathrm{P} = \alpha\,(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r})\det(\mathbf{U}) =$$

$$= \alpha\,(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{R})\det(\mathbf{U}) = \alpha\,(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{R})\det(\mathbf{U}) = \alpha\,\mathbf{E}.$$

Обозначая $\alpha = -\,p$, получаем

$$\mathbf{P} = -\,p\mathbf{E}. \qquad (41)$$

Таким образом, напряжение в несжимаемом материале определяется предысторией движения только с точностью до произвольного гидростатического давления.

Подчеркнем, что речь идет о невозможности определить σ *только по предыстории движения, а не о принципиальной неопределимости* σ*. В гидродинамике и теории упругости существуют хорошо разработанные подходы и методы определения гидростатического давления в несжимаемых средах.*

Следует отличать изохорические движения материалов без связей данного типа от движений несжимаемого материала, которые могут быть только изохорическими. В первом случае тензор напряжений полностью определяется предысторией движения.

2**. Нерастяжимость.** Рассмотрим материал, не допускающий в окрестности произвольной частицы растяжения-сжатия вдоль фиксированного по отношению к материальным волокнам (в K_0) направления $\overset{\circ}{\boldsymbol{l}}$ $(|\overset{\circ}{\boldsymbol{l}}| = 1)$. Отметим, что в силу нерастяжимости единичный материальный вектор $\overset{\circ}{\boldsymbol{l}}$ в K_0 переходит в актуальной конфигурации K_t в единичное материальное волокно $\hat{\boldsymbol{l}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{l}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}$.

Подобная связь может считаться достаточно точно описывающей поведение композиционных материалов, образуемых полимерной матрицей, армированной параллельными прямолинейными жесткими волокнами с идеальным сцеплением; жесткость матрицы и волокон при этом может от-

личаться на несколько порядков. Подчеркнем, что речь идет о модели сплошной однородной среды, описывающей реальный гетерогенный материал.

Уравнение простой связи в этом случае можно записать в виде

$$\gamma(\mathbf{U}) = \overset{\circ}{\boldsymbol{l}}\cdot \mathbf{U}^2 \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{l}} - 1 = \mathbf{U}^2 : \overset{\circ}{\boldsymbol{l}}\overset{\circ}{\boldsymbol{l}} - 1 = \overset{\circ}{\boldsymbol{l}}\overset{\circ}{\boldsymbol{l}} : \mathbf{U}^2 - 1 = 0. \qquad (42)$$

Используя представление $\mathbf{U}$ в базисе главных векторов и известное соотношение $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{A}:\mathbf{B}) = \mathbf{A}:\mathbf{B}_{\mathbf{Q}} + \mathbf{B}:\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$, получаем

$$\frac{\partial \gamma(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{l}}\overset{\circ}{\boldsymbol{l}} : (\mathbf{U}^2)_{\mathrm{U}},$$

$$(\mathbf{U}^2)_{\mathrm{U}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \mathrm{U}_i} \Big(\sum_{j=1}^{3} \mathrm{U}_j^2 \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{j} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_j\Big) \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{i} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i = 2\sum_{i=1}^{3} \mathrm{U}_i \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{i} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{i} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i .$$

Тогда

$$\frac{\partial \gamma(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = 2\sum_{i=1}^{3} \mathrm{U}_i (\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{i} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{l}})(\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{l}}) \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{i} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i ,$$

$$\frac{\partial \gamma(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} = 2\Big(\sum_{i=1}^{3} \mathrm{U}_i (\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{i} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{l}})(\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{l}}) \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{i} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i\Big) \cdot \sum_{j=1}^{3} \mathrm{U}_j^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{j} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_j =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{3} (\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{i} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{l}})(\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{l}}) \overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^{i} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i = 2\overset{\circ}{\boldsymbol{l}}\overset{\circ}{\boldsymbol{l}}.$$

В соответствии с (39) устанавливаем

$$\mathbf{P} = 2\alpha(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{l}}\overset{\circ}{\boldsymbol{l}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}) = 2\alpha\hat{\boldsymbol{l}}\hat{\boldsymbol{l}},$$

причем, как отмечено выше, $|\hat{\boldsymbol{l}}| = 1$.

Таким образом,

$$\mathbf{P} = \mathrm{q}\hat{\boldsymbol{l}}\hat{\boldsymbol{l}}, \qquad (43)$$

т. е. тензор **P** здесь — произвольное одноосное напряжение в направлении $\hat{\boldsymbol{l}}$ в K_t. Указанный результат впервые получен Адкинсом и Ривлиным и говорит о том, что в материале, нерастяжимом в некотором фиксированном в K_0 направлении, напряжения определяются предысторией движения лишь с точностью до произвольного одноосного напряжения, действующего вдоль этого же материального направления в K_t.

Как и в предшествующем примере, следует заметить, что это не означает принципиальную неопределимость тензора напряжений σ, *утверждается лишь, что для этого недостаточно знать предысторию движения.*

3. **Абсолютная твердость.** Абсолютно твердое тело является нерастяжимым по любому направлению. Отсюда в соответствие с полученным в

предыдущем примере результатом следует, что напряжения в абсолютно твердом теле вообще не зависят ни от каких движений.

Заметим, что данное обстоятельство свидетельствует об отсутствии необходимости ОС для рассмотрения движения твердого тела, т.е. замкнутости уравнений кинематического и динамического типов вместе с соответствующими начальными и граничными условиями для подобных объектов.

Таким образом, для материалов со связями класс возможных предысторий деформации является более узким, чем для материалов без связей. Однако при этом оказывается, что класс возможных полей напряжений при одинаковых предысториях существенно шире для тел со связями. Действительно, в этом случае напряжения определяются предысториями деформаций только с точностью до некоторых произвольных тензоров напряжений. Та или иная фиксированная предыстория движения для тел со связями будет соответствовать бесконечно многим полям напряжений. Данное обстоятельство представляет большую свободу действий при проверке выполнения и установления условий выполнения аксиом механики для тел со связями.

8. Материальный изоморфизм

В приведенном выше изложении при рассмотрении ОС речь шла, по существу, об отдельных частицах материала с малой окрестностью; для тела в целом ОС не устанавливались (за исключением модельного тела, которое является, опять же, образом, аналогом частицы). Очевидно, что при анализе процессов деформирования реальных материальных тел говорить об ОС для каждой частицы исследуемого тела можно только в сугубо теоретическом смысле (в силу бесконечности частиц в теле).

Следовательно, встает вопрос об установлении связей между определяющими отображениями (функционалами памяти) для различных частиц рассматриваемого тела, определении соответствия между ними. Лучшим видом соответствия, очевидно, является совпадение определяющих отображений для различных частиц тела. Возникает вопрос: “В каких случаях можно утверждать, что частицы x_1 и x_2 тела состоят из одного и того же материала (или имеют одинаковые модели)?”

Возможный вариант ответа, причем достаточно общий, заключается в наличии таких конфигураций K_1 и K_2 для малых окрестностей частиц x_1 и x_2, соответственно, что для любых историй деформаций $\overset{K_1}{\nabla}\mathbf{r}(x_1,t)$ и $\overset{K_2}{\nabla}\mathbf{r}(x_2,t)$

этих окрестностей из конфигураций K_1 и K_2 определяющие отображения для каждой из частиц будут одинаковы.

Таким образом, никакое экспериментальное измерение напряжений, порождаемых указанными одинаковыми деформациями, не может ответить на вопрос, производилось ли деформирование окрестности x_1 тела B от конфигурации K_1 или окрестности частицы x_2 тела B от конфигурации K_2. Очевидно, что для неотличимости частиц следует также положить равными плотности ρ_{K_1} и ρ_{K_2} вблизи x_1 и x_2 в конфигурациях K_1 и K_2, соответственно.

В связи с вышесказанным можно привести следующее определение.

Определение (Нолл) [2].

Пусть $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}$ — реакция простого материала по отношению к отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{K}$. Частицы x_1 и x_2 тела B называются материально изоморфными, если существуют такие отсчетные конфигурации $\overset{\circ}{K}_1$ и $\overset{\circ}{K}_2$ частиц x_1 и x_2 с их ε-окрестностями, что $\rho_1(x_1)=\rho_2(x_2)=const$ и

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_1}((\overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla}\mathbf{r}(x_1,\tau))^t;\mathbf{R}_{01},t)=\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_2}((\overset{\overset{\circ}{K}_2}{\nabla}\mathbf{r}(x_2,\tau))^t;\mathbf{R}_{02},t) \tag{44}$$

для любой невырожденной тензорной предыстории

$$\left(\overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla}\mathbf{r}(x_1,\tau)\right)^t=\left(\overset{\overset{\circ}{K}_2}{\nabla}\mathbf{r}(x_2,\tau)\right)^t.$$

Следует отметить, что содержащееся в приведенных выше соотношениях обозначение $\mathbf{r}(x_i,\tau)$ *в левой и правой частях не следует воспринимать как один и тот же радиус-вектор частиц в актуальной конфигурации; указанное выражение представляет собой обозначение поля радиусов-векторов для малых окрестностей выделенных частиц* x_i. *В общем случае* $\mathbf{r}(x_1,\tau)$ *и* $\mathbf{r}(x_2,\tau)$, *конечно, отличаются* $\forall t$.

Кроме того, в соотношении (44) моменты времени, указанные в правой и левой частях, также могут отличаться, что не скажется на существе определения материально изоморфных частиц. Суть последнего иначе можно сформулировать следующим образом: две частицы x_1 *и* x_2 *(с малыми окрестностями) являются материально изоморфными, если их поведение может быть полностью воспроизведено с использованием одного и того же* x*-модельного тела, отсчетная конфигурация которого соответствует, вообще говоря, различным конфигурациям малых окрестностей частиц* x_1 *и* x_2.

Если ***все частицы*** тела B оказываются ***попарно материально изоморфны друг другу***, то тело называется ***единообразным***. Если же при этом материальный изоморфизм единообразного тела может быть установлен с помощью ***одной и той же*** (для всего тела) ***отсчетной конфигурации*** $\overset{\circ}{K}$, то тело называют ***однородным***. Очевидно, что для однородного материала его реакция на историю деформирования от этой специальной конфигурации $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t})$ не зависит от R_0.

Каждое однородное тело является единообразным, однако обратное не верно. В дальнейшем здесь будут рассматриваться только однородные тела.

Представляется нереализующимся процесс изменения состояния тела от его “рождения” и до исследуемой конфигурации $\overset{\circ}{K}$, в котором все частицы тела испытывали бы одинаковые воздействия (даже в вероятностном смысле). Однако для большинства материалов характерно свойство “забывания” предыстории воздействий в определенных условиях, реализуемых на практике (в частности, с помощью термической обработки), что делает предположение о существовании однородных тел приемлемым при рассмотрении реальных процессов.

9. Группа равноправности

Очевидно, каждая частица с ε-окрестностью тривиально изоморфна самой себе. Однако для каждой отдельной частицы x (или x-модельного тела) может существовать и нетривиальный изоморфизм, т. е. могут существовать отличные друг от друга отсчетные конфигурации $\overset{\circ}{K}_1$ и $\overset{\circ}{K}_2$ для рассматриваемой частицы, такие что

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_1}((\mathbf{F}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{t}}) = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_2}((\mathbf{F}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{t}}) \tag{45}$$

для любой невырожденной предыстории градиенты деформации $\mathbf{F}^{\mathrm{t}}$ (напомним, что $\mathbf{F} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$). Поскольку в данном случае речь идет об одной и той же частице, обозначение частицы x (или $\mathbf{R}_0$) исключено; предыстории деформации в левой и правой частях соотношения (45) одинаковы, но определяются по отношению к различным отсчетным конфигурациям ($\overset{\circ}{K}_1$ и $\overset{\circ}{K}_2$).

Таким образом, согласно (45) реакция материала (напряжения) при одинаковых предысториях деформаций относительно двух различных конфигураций одной и той же частицы (с ε-окрестностью) будет одинаковой.

Например, для упруго-идеально-пластических материалов в качестве таких конфигураций могут быть использованы любые конфигурации после нагружения и полной разгрузки. Следует отметить, что здесь говорится о неотличимости конфигураций по реакции материала в макросмысле; при переходе на иной масштабный уровень (например, мезо- или микроуровень) ситуация меняется: субструктура дефектов в сравниваемых конфигурациях может существенно отличаться, однако эти отличия несущественно влияют на поведение материала в макроэкспериментах.

Возникает вопрос о соответствии вводимого понятия с содержащимся в предыдущем разделе определением материального изоморфизма. В предыдущем определении устанавливался "пространственный изоморфизм", соответствие между различными частицами исследуемого тела. При этом частицы не различимы не только по реакции материала, но и "геометрически", т. е. не обладая никакой информацией о предшествующих деформациях частиц x_1 *и* x_2, *их конфигурации* $\overset{\circ}{K}_1$ и $\overset{\circ}{K}_2$ *нельзя различить ни по взаиморасположению, ни по длинам материальных отрезков.*

Рассматриваемое в настоящем разделе соответствие (45) можно назвать изоморфизмом "по времени" (или — "по параметру нагружения"). Здесь анализируется одна и та же частица в различных конфигурациях с неотличимой реакцией материала. В то же время понятно, что геометрически эти конфигурации вполне различимы, одна получается из другой некоторым деформированием.

Таким образом, никакими макроэкспериментами по определению реакции материала вблизи точки x тела B нельзя установить, из какой конфигурации осуществляется деформирование — $\overset{\circ}{K}_1$ или $\overset{\circ}{K}_2$. В этом случае говорят, что конфигурации $\overset{\circ}{K}_1$ и $\overset{\circ}{K}_2$ ***равноправны*** в точке x (по отношению к реакции $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}$).

Предположим, что имеется некоторое множество отображений, переводящих выбранную конфигурацию $\overset{\circ}{K}$ в равноправные; обозначим это множество $M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$. Получаемая из $\overset{\circ}{K}$ с помощью некоторого отображения из $M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$ конфигурация $\overset{\circ}{K}'$ совершенно неотличима от исходной конфигурации $\overset{\circ}{K}$ с точки зрения реакции материала. Воздействуя на конфигурацию $\overset{\circ}{K}'$ вновь оператором из множества $M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$, получаем конфигурацию $\overset{\circ}{K}''$, равноправную и $\overset{\circ}{K}'$, и $\overset{\circ}{K}$. Иначе говоря, суперпозиция операторов из $M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$ есть оператор того же множества. Очевидно, что множеству $M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$ принадлежит "единичный" оператор.

Если оператор $\mathbf{A} \in M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$ отображает $\overset{\circ}{K} \to \overset{\circ}{K}'$ (равноправную конфигурацию), то существует и обратный оператор $\mathbf{A}^{-1}$: $\overset{\circ}{K}' \to \overset{\circ}{K}$, и по определению этот оператор принадлежит $M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$. Наконец, если $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$, то $\mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{C}(\overset{\circ}{K})) = (\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \circ (\mathbf{C}(\overset{\circ}{K}))$, т.е. выполняется закон ассоциативности. *Показать последнее свойство нетрудно, учитывая, что отображения из множества* $M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$ *представляют собой вектор-значные функции (аффинные преобразования)* λ_i *векторных аргументов; например,* λ: $\overset{\circ}{K} \to \overset{\circ}{K}'$, $\lambda(\mathbf{R}_0) = \mathbf{R}_0'$. С учетом свойств множества отображений $M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$ можно заключить, что это множество представляет собой **группу относительно операции суперпозиции**. Нетрудно увидеть, что свойство коммутативности не выполняется.

Группа $M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$ называется ***группой равноправности материала по отношению к*** $\overset{\circ}{K}$ ***в точке*** x**,** ***определяемой реакцией*** $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}$. *Иногда ее называют группой изотропии; однако следует иметь в виду, что речь не идет об изотропии материала (независимости реакции от ориентации материального объема по отношению к фиксированной в пространстве истории деформации, например), для анизотропных материалов также существуют группы равноправности.*

Следует отметить, что обычно группой равноправности называют не сами отображения λ_i, а их градиенты; операции суперпозиции в этом случае соответствует операция скалярного произведения.

Рассмотрим подробнее указанное соответствие. Пусть $\lambda_1\colon \overset{\circ}{K} \to \overset{\circ}{K}_1$, $\lambda_2\colon \overset{\circ}{K}_1 \to \overset{\circ}{K}_2$, $\lambda_3\colon \overset{\circ}{K}_2 \to \overset{\circ}{K}_3$, $\lambda_1(\cdot), \lambda_2(\cdot), \lambda_3(\cdot) \in M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$. *Согласно вышесказанному*

$$\lambda_3(\lambda_2 \circ \lambda_1(\mathbf{R}_0)) = \lambda_3(\lambda_2(\mathbf{R}_0^1)) = \lambda_3(\mathbf{R}_0^2) = \mathbf{R}_0^3,$$
$$(\lambda_3 \circ \lambda_2)(\lambda_1(\mathbf{R}_0)) = (\lambda_3 \circ \lambda_2)(\mathbf{R}_0^1)) = \mathbf{R}_0^3.$$

В соответствие преобразованию с помощью вектор-значных функций ставится преобразование, осуществляемое с помощью градиентов $\lambda_i(\cdot)$, *определенных в соответствующих конфигурациях. Например, преобразование конфигурации окрестности* $\mathbf{R}_0$ *в* $\overset{\circ}{K}$ *в конфигурацию окрестности* $\mathbf{R}_0^2$ *в* $\overset{\circ}{K}_2$ *осуществляется следующим образом:*

$$\overset{\overset{\circ}{K}}{\nabla}[(\lambda_2 \circ \lambda_1)(\mathbf{R}_0)] = \overset{\overset{\circ}{K}}{\nabla}(\lambda_1(\mathbf{R}_0)) \cdot \overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla}(\lambda_2(\lambda_1(\mathbf{R}_0))) =$$
$$= \overset{\overset{\circ}{K}}{\nabla}\mathbf{R}_0^1 \cdot \overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla}\mathbf{R}_0^2 = \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^s \overset{1}{\mathbf{e}}_s \cdot \overset{1}{\mathbf{e}}{}^p \overset{2}{\mathbf{e}}_p = \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^s \overset{2}{\mathbf{e}}_s,$$

так что $d\mathbf{R}_0 = d\xi^i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$ *преобразуется в* $d\mathbf{R}_0^2 = d\xi_0^i \overset{2}{\mathbf{e}}_i$ *согласно соотношению*

$$d\mathbf{R}_0 \cdot \nabla[(\lambda_2 \circ \lambda_1)(\mathbf{R}_0)] = d\mathbf{R}_0^2.$$

Тождественный оператор в данном случае есть $\overset{\overset{\circ}{K}}{\nabla}\mathbf{R}_0 = \mathbf{E} = \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^s \overset{\circ}{\mathbf{e}}_s = \overset{\circ}{\mathbf{e}}_s \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^s$. *Обратный оператор для преобразования, например,* $\lambda\colon \mathbf{R}_0 \to \mathbf{R}_0^1$ *есть* $(\overset{\overset{\circ}{K}}{\nabla}\mathbf{R}_0^1)^{-1} = \overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla}\mathbf{R}_0 = \overset{1}{\mathbf{e}}{}^s \overset{\circ}{\mathbf{e}}_s$. *Нетрудно показать ассоциативность указанных операторов (градиентов места).*

Иначе говоря, градиенты преобразований $\lambda \in M_{\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}}$ также образуют группу $G_{\overset{\circ}{K}}$ по отношению к операции скалярного произведения; в дальнейшем именно $G_{\overset{\circ}{K}}$ будет называться ***группой равноправности конфигурации*** $\overset{\circ}{K}$ ***в точке*** x ***(по отношению к реакции*** $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}$***)***. При этом равноправные конфигурации должны иметь одинаковую плотность (поскольку плотность часто входит в качестве независимого аргумента определяющего отображения, и в противном случае не представляется возможным осуществить одинаковую историю воздействий из равноправных конфигураций; кроме того, различие в плотности двух конфигураций легко устанавливается в макроэкспериментах).

Следовательно, градиенты рассматриваемых преобразований должны иметь единичный по модулю определитель

$$|\det \overset{\circ}{\nabla} \lambda| = 1. \tag{46}$$

Таким образом, группа равноправности $G_{\overset{\circ}{K}}$ конфигурации $\overset{\circ}{K}$ в точке x — это подгруппа унимодулярной группы U:

$$G_{\overset{\circ}{K}} \subset U, \tag{47}$$

состоящая из градиентов всех отображений, переводящих $\overset{\circ}{K}$ в равноправные конфигурации. Обозначим элементы этой группы через **H**, $\mathbf{H} \in G_{\overset{\circ}{K}}$; **H** — унимодулярные тензоры второго ранга.

Обозначим: λ: $\overset{\circ}{K}_1 \to \overset{\circ}{K}_2$; $\mathbf{H} = \overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla} \lambda \in G_{\overset{\circ}{K}}$. Учитывая свойства градиентов относительно различных отсчетных конфигураций и соотношение (15), из (45) следует

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_1}((\mathbf{F}^T)^t) = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_1}(\mathbf{H} \cdot (\mathbf{F}^T)^t) \tag{48}$$

для любой невырожденной предыстории $(\mathbf{F}^T)^t$. Подобное соотношение можно получить для $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}_2}$ (с использованием градиента обратного преобразования $\mathbf{H}^{-1}$). Однако в данном случае конфигурации $\overset{\circ}{K}_1$, $\overset{\circ}{K}_2$ равноправны с точки зрения определяющего отображения и их можно отождествить с отсчетной конфигурацией $\overset{\circ}{K}$ рассматриваемой группы равноправности $G_{\overset{\circ}{K}}$. Следовательно, соотношение (48) может быть преобразовано к виду

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\mathbf{H} \cdot (\mathbf{F}^T)^t) = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}((\mathbf{F}^T)^t), \tag{49}$$

или

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\mathbf{H} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^t) = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^t) \tag{50}$$

$\forall \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^t = (\mathbf{F}^T)^t$ и $\forall \mathbf{H} \in G_{\overset{\circ}{K}}$.

Таким образом, элементы группы равноправности $G_{\overset{\circ}{K}}$ представляют собой унимодулярные тензоры **H**, такие, что для любых невырожденных предысторий деформации $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^t$ справедливо (50), и обратно, любой такой тензор **H** является элементом группы $G_{\overset{\circ}{K}}$.

Вообще говоря, тензоры $\mathbf{H} \in G_{\overset{\circ}{K}}$ не являются ортогональными. Однако поскольку $G_{\overset{\circ}{K}}$ представляет собой (мультипликативную) группу, то $\mathbf{E} \in G_{\overset{\circ}{K}}$. В силу того, что $\mathbf{E} \in$ O, подгруппа ортогональных тензоров в $G_{\overset{\circ}{K}}$ не пуста.

Пусть некоторый ортогональный тензор $\mathbf{O} \in G_{\overset{\circ}{K}}$, тогда в силу групповых свойств $\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}^{T} \in G_{\overset{\circ}{K}}$. Предположим, что некоторый градиент места $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}$ описывает невырожденную тензорную историю $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t}$, откуда невырожденной будет и история $(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t}) \cdot \mathbf{O}$. *Заметим, что в данном случае* $\mathbf{O} \in G_{\overset{\circ}{K}}$ *представляет собой тензор (равно как и* $\mathbf{H} \in G_{\overset{\circ}{K}}$*), а не тензорзначную функцию.*

Полагая $\mathbf{H}=\mathbf{O}^{T}$, из (50) имеем

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\mathbf{O}^{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t} \cdot \mathbf{O}) = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t} \cdot \mathbf{O}). \tag{51}$$

В записи принципа независимости от системы отсчета (для определяющего отображения в K_t) можно положить $\mathbf{O}^{t} = \mathbf{O}(t) = \mathbf{O} = \mathrm{const}$, тогда получаем

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t} \cdot \mathbf{O}) = \mathbf{O}^{T} \cdot \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t}) \cdot \mathbf{O}. \tag{52}$$

Заметим, что в отличие от (51), где $\mathbf{O} \in G_{\overset{\circ}{K}}$, соотношение (52) справедливо $\forall \mathbf{O} \in$ O. Объединяя (51) и (52), получаем, что $\forall \mathbf{O} \in G_{\overset{\circ}{K}}$ выполняется соотношение

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\mathbf{O}^{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t} \cdot \mathbf{O}) = \mathbf{O}^{T} \cdot \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t}) \cdot \mathbf{O}, \tag{53}$$

являющееся необходимым условием для ортогональных элементов группы $G_{\overset{\circ}{K}}$. Проводя рассуждения в обратном порядке, можно показать, что если $\mathbf{O}$ удовлетворяет (53), то $\mathbf{O} \in G_{\overset{\circ}{K}}$. Следовательно, условие (53) является необходимым и достаточным условием принадлежности ортогонального тензора $\mathbf{O}$ группе равноправности $G_{\overset{\circ}{K}}$.

Отметим, что условие (53) по виду совпадает с определением изотропных функций, однако в последнем $\mathbf{O}$ *— произвольные элементы* O*; в данном же случае* $\mathbf{O} \in G_{\overset{\circ}{K}}$.

Очевидно, что оператор инверсии (тензор $(-\mathbf{E})$) принадлежит группе $G_{\overset{\circ}{K}}$, что непосредственно следует из (53):

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}((-\mathbf{E})^{T}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t}\cdot(-\mathbf{E}))=\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t})=(-\mathbf{E})^{T}\cdot\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t})\cdot(-\mathbf{E}).$$

Преобразование инверсии, очевидно, не отвечает никакой физически реализуемой деформации, однако с точки зрения формальной ничто не препятствует введению **-E** в группу $G_{\overset{\circ}{K}}$. Тогда если $\mathbf{H}\in G_{\overset{\circ}{K}}$, то $\mathbf{H}\cdot(-\mathbf{E})=(-\mathbf{H})\in G_{\overset{\circ}{K}}$. Следовательно, если в $G_{\overset{\circ}{K}}$ выделить подгруппу $G^{+}_{\overset{\circ}{K}}$ физически реализуемых преображений с градиентами, определители которых равны (+1), то группу преобразований $G_{\overset{\circ}{K}}$ можно представить прямым произведением тривиальной группы (**E**,-**E**) на группу $G^{+}_{\overset{\circ}{K}}$:

$$G_{\overset{\circ}{K}}=(\mathbf{E},-\mathbf{E})\otimes G^{+}_{\overset{\circ}{K}}. \qquad (54)$$

Попутно показано, что наименьшая возможная группа равноправности есть (**E**,-**E**).

Вообще говоря, любая подгруппа унимодулярной группы может быть группой равноправности некоторого материала. Можно построить бесконечное множество функций реакции материала $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}$, отвечающих определенной произвольной подгруппе $G_{\overset{\circ}{K}}$.

Заметим, что по аналогии с приведенной формой определяющих соотношений, можно записать $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}$ *в приведенной форме, не зависящей от выбора системы отсчета и автоматически отвечающей всем материалам, имеющим данную группу равноправности, и только им.*

Рассмотрим вопрос о соответствии групп равноправности по отношению к различным отсчетным конфигурациям (т.е. не обязательно входящим в группу равноправности $G_{\overset{\circ}{K}}$ отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{K}$). Действительно, как и определяющее отображение $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}$, группа равноправности $G_{\overset{\circ}{K}}$ для выбранной материальной частицы в общем случае зависит от выбора отсчетной конфигурации. В то же время, поскольку речь идет об одном и том же материале, представляется физически оправданным предположение о наличии связи между группами равноправности $G_{\overset{\circ}{K}_1}$ и $G_{\overset{\circ}{K}_2}$ различных конфигураций $\overset{\circ}{K}_1$ и $\overset{\circ}{K}_2$ (в общем случае не входящих в одну группу равноправности рассматриваемой частицы). Попытаемся установить соответствие между элементами групп равноправности $G_{\overset{\circ}{K}_1}$ и $G_{\overset{\circ}{K}_2}$.

Пусть, как и ранее, **p**: $\overset{\circ}{K}_1\to\overset{\circ}{K}_2$, $\mathbf{P}=\overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla}\mathbf{p}$; при этом на **P** не накладывается требование унимодулярности, однако **P** является невырожденным тензором. Несколько преобразуем соотношение (15), справедливое $\forall(\mathbf{F}^{T})^{t}$, взяв в качестве $(\mathbf{F}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{t}} = \mathbf{P}^{-1}\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r})^{\mathrm{t}}$ (в силу невырожденности $\mathbf{P}$ невырожденными являются $\mathbf{P}^{-1}$ и предыстория $\mathbf{P}^{-1}\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r})^{\mathrm{t}}$):

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}) = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}(\mathbf{P}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}). \tag{55}$$

Заметим, что в силу невырожденности $\mathbf{H}_1 \in \mathrm{G}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}$ в последнем соотношении в качестве предыстории градиента места может быть использована предыстория $\mathbf{H}_1\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}$, тогда

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}(\mathbf{H}_1\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}) = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}(\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{H}_1\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}). \tag{56}$$

В соответствии с (50) $\forall\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}$ (невырожденных) и $\forall\mathbf{H}_1 \in \mathrm{G}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}$ справедливо

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}(\mathbf{H}_1\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}) = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}). \tag{57}$$

Применяя к левой части (57) соотношение (56), а к правой части (57) — выражение (55), получаем

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}(\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{H}_1\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}) = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}(\mathbf{P}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}),$$

справедливое для любой невырожденной предыстории $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}$. Преобразуя левую часть последнего соотношения, имеем

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}[(\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{P})\cdot(\mathbf{P}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}})] = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}(\mathbf{P}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}). \tag{58}$$

В силу невырожденности $\mathbf{P}^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}$ данная предыстория может использоваться в (58) в качестве некоторой произвольной предыстории, которую в дальнейшем будем обозначать как $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}$. Тогда из (58) получаем окончательно, что для любой невырожденной предыстории $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}$ и $\forall\mathbf{H}_1 \in \mathrm{G}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}$ справедливо соотношение

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}[(\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{P})\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}] = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{t}}). \tag{59}$$

Заметим, что из унимодулярности $\mathbf{H}_1$ следует унимодулярность $\mathbf{H}_2 = \mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{P}$, и наоборот. Нетрудно видеть, что (59) с точностью до обозначений соответствует (50).

Аналогичным образом, исходя из (50) при $\overset{\circ}{\mathrm{K}} = \overset{\circ}{\mathrm{K}}_2$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \in G_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}$, можно показать, что $\forall \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^{t}$

$$\mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^{t}) = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^{t}), \tag{60}$$

где $\mathbf{P} \cdot \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{P}^{-1}$ — унимодулярный тензор.

Таким образом, доказаны следующие **утверждения**:

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{H}_1 \in G_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1} \quad \exists \mathbf{H}_2 = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{P} \in G_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}, \\ &\forall \mathbf{H}_2 \in G_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2} \quad \exists \mathbf{H}_1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{P}^{-1} \in G_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}, \end{aligned} \tag{61}$$

где $\mathbf{P}$ — градиент преобразования $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1 \to \overset{\circ}{\mathrm{K}}_2$. Иначе говоря, **между группами равноправности** $G_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}$ **и** $G_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}$ выбранной частицы x (с малой окрестностью) в двух конфигурациях $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1$ и $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2$, **существует взаимно-однозначное соответствие** вида (61).

Отсюда следует, кроме того, что **существование группы равноправности и ее “мощность” есть факты, не зависящие от выбора отсчетной конфигурации.**

В случае, если $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1$ *и* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2$ *— равноправные конфигурации (т.е.* $\mathbf{P}, \mathbf{P}^{-1} \in G_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}$, $\mathbf{P}, \mathbf{P}^{-1} \in G_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}$*), их группы равноправности совпадают.*

Прокомментируем полученный результат (61). Пусть $\overset{\circ}{\mathrm{K}}'_1, \overset{\circ}{\mathrm{K}}''_1$ *— равноправные конфигурации, получаемые с помощью преобразования* $\mathbf{H}_1 \in G_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}$, $\mathbf{H}_1\colon \overset{\circ}{\mathrm{K}}'_1 \to \overset{\circ}{\mathrm{K}}''_1$. *При этом для любой предыстории деформации* $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^{t}$ *из этих конфигураций отклик материала, определяемый функционалом* $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1}$*, неотличим.*

Пусть некоторое деформирование, градиент которого обозначается через $\mathbf{P}$*, переводит конфигурацию* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}'_1$ *в* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}'_2$*, а* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}''_1$ *— в* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}''_2$*. Тогда реакция материала, определяемая из новой отсчетной конфигурации* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}'_2$ *(или* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}''_2$*) функционалом* $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2}$*, на любую предысторию* $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^{t}$ *будет также неотличима по отношению к выбору конфигурации* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}'_2$ *или* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}''_2$*. При этом конфигурация* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}''_2$ *получается из* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}'_2$ *преобразованием* $\mathbf{H}_2 = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{P}$.

Заметим, что если $G_{\overset{\circ}{K}_1} = \{-\mathbf{E}, \mathbf{E}\}$ *(т.е. равноправные конфигурации в* $\overset{\circ}{K}_1$ *— только сама конфигурация* $\overset{\circ}{K}_2$ *и полученная из нее инверсией), то в* $\overset{\circ}{K}_2$ *группа равноправности также состоит только из* **E** *и* (-**E**)*,* $G_{\overset{\circ}{K}_2} = \{-\mathbf{E}, \mathbf{E}\}$*. Данное свойство следует непосредственно из (61).*

Отметим, что $G_{\overset{\circ}{K}_1}$, $G_{\overset{\circ}{K}_2} \subset U$, но на преобразование **P** ограничение унимодулярности не накладывается, т.е. плотности в конфигурациях $\overset{\circ}{K}_1$ и $\overset{\circ}{K}_2$ не обязательно должны совпадать. Интересно заметить, что если конфигурация $\overset{\circ}{K}_2$ получается из $\overset{\circ}{K}_1$ всесторонним растяжением (сжатием), т.е. **P**=k**E**, то $G_{\overset{\circ}{K}_1} = G_{\overset{\circ}{K}_2}$, что непосредственно следует из (61). Иначе говоря, **группа равноправности не изменяется при объемном расширении или сжатии.**

Из результатов, полученных выше, следует, что при произвольном выборе “второй отсчетной конфигурации” $\overset{\circ}{K}_2$ группа равноправности в общем случае изменяется, т.е. равноправность (в точном смысле элементов группы $G_{\overset{\circ}{K}}$) зависит от выбора отсчетной конфигурации.

Однако возможны ситуации, когда $G_{\overset{\circ}{K}_1} = G_{\overset{\circ}{K}_2} = G$ при любом выборе отсчетной конфигурации. В этом случае материал называется **эгалитарным**. Никакая деформация не может уменьшить или расширить эту группу или изменить ее. Согласно (61) группа равноправности эгалитарного материала должна удовлетворять уравнению (в символической форме)

$$\forall \mathbf{P} \quad G = \mathbf{P}^{-1}(G)\,\mathbf{P}. \tag{62}$$

Из теории групп известно, что уравнение (62) не имеет других решений G, кроме так называемых тривиальных; под последними понимается или унимодулярная группа, G = U, или G = {**E**}.

Одним из простых примеров эгалитарного материала являются тела с наименьшей группой равноправности. К таким относятся, например, твердые, так называемые триклинные материалы, группой равноправности которых является {-**E**,**E**}*. Нетрудно увидеть, что в этом случае* $\forall \mathbf{P}\ G_{\overset{\circ}{K}_1} = G_{\overset{\circ}{K}_2} = \{-\mathbf{E}, \mathbf{E}\}$.

Другим предельным случаем являются материалы, имеющие самый широкий класс равноправности, т.е. $G_{\overset{\circ}{K}} = U$*. Ниже будут рассмотрены жидкости, являющиеся эгалитарными материалами, группой равноправности которых является унимодулярная группа* U.

10. Изотропные материалы

Изотропные материалы имеют особое значение в МСС и теории определяющих соотношений. Большинство известных теорий и решенных задач в МСС относятся именно к этому классу материалов. Указанное обстоятельство связано с тем, что значительное число материальных объектов в макросмысле с высокой степенью достоверности в отсчетной естественной конфигурации можно считать изотропными. В то же время следует отметить, что данное тело, рассматриваемое на другом (меньшем) масштабном уровне, обычно не может считаться изотропным. Например, поликристаллические материалы в рамках представительного макрообъема достаточно точно описываются моделью изотропного тела, тогда как отдельные кристаллы (зерна, субзерна), составляющие поликристалл, обладают ярко выраженной анизотропией.

Определение (Коши, Нолл) [5].

Материал является изотропным, если существует такая отсчетная конфигурация $\overset{\circ}{\mathrm{K}}$**, что**

$$G_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}} \supset O, \tag{63}$$

где O — **полная ортогональная группа. Такая конфигурация** $\overset{\circ}{\mathrm{K}}$ **называется неискаженной.**

В данном случае никакой поворот отсчетной конфигурации не может быть обнаружен экспериментально по отклику (реакции) материала. Из определения равноправности следует, что любой поворот конфигурации $\overset{\circ}{\mathrm{K}}$ переводит ее в равноправную; отсюда следует, в частности, что изотропный материал обладает бесконечным множеством неискаженных конфигураций. Однако это не означает, что любая другая конфигурация $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1$ этого же материала (“искаженная”) содержит в качестве группы равноправности (или ее подгруппы) полную ортогональную группу, что непосредственно следует из (61).

Как показывается в теории групп, ортогональная группа является максимальной подгруппой унимодулярной группы, т.е. если G — группа равноправности и $O \subset G \subset U$, то либо $G = O$, либо $G = U$. Таким образом, **группа равноправности изотропного материала является либо (полной) ортогональной, либо унимодулярной.**

11. Твердые тела

В литературе по МСС имеются различные определения твердого тела, носящие большей частью описательный характер. Например, исходя из сплошности материала (тела) и ограниченности градиентов места, характерной для твердых тел, можно определить последние как такую сплошную среду (или тело), для которой любые бесконечно близкие в K_0 частицы $\mathbf{R}_0', \mathbf{R}_0''$ $(\mathbf{R}_0' - \mathbf{R}_0'' = d\mathbf{R}_0)$ остаются бесконечно близкими $\forall t$ в конфигурации K_t : $\mathbf{R}_0' \to \mathbf{r}'$, $\mathbf{R}_0'' \to \mathbf{r}''$, $\mathbf{r}' - \mathbf{r}'' = d\mathbf{r}$, т. е. $O(d\mathbf{R}_0) = O(d\mathbf{R}_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}) = O(d\mathbf{r})$.

С точки зрения физики твердые тела определяются обычно как тела, внутренняя потенциальная энергия П которых существенно превосходит кинетическую энергию движения микрочастиц Т, $T/П \ll 1$.

Рассмотрим понятие твердого тела, вводимое на основе понятия равноправности. Отметим прежде всего, что из многочисленных экспериментов известно, что для твердых тел существует некоторая специальная конфигурация, любой неортогональный переход из которой в другую конфигурацию меняет реакцию материала (по крайней мере, по отношению к некоторым деформациям). Иначе говоря, любое неортогональное изменение этой специальной конфигурации может быть обнаружено экспериментально.

Кроме того известно, что во многих случаях и некоторые ортогональные преобразования отсчетной конфигурации могут быть обнаружены с помощью экспериментов (например, для кристаллов). В соответствии с вышесказанным можно ввести следующее формальное определение.

Определение (Нолл):

Материал называется твердым, если существует такая его отсчетная конфигурация $\overline{K}_0$, что

$$G_{\overline{K}_0} \subset O; \tag{64}$$

конфигурация $\overline{K}_0$ называется неискаженной.

В соответствии с определением любая “неортогональная деформация” $\overset{\overline{K}_0}{\nabla}\mathbf{r} \notin O$ не принадлежит группе равноправности $G_{\overline{K}_0}$, где $\overline{K}_0$ — неискаженная конфигурация твердого тела.

Изотропное твердое тело должно одновременно отвечать определениям твердого и изотропного тела. Каждое из этих определений вводится с помощью соответствующих неискаженных конфигураций с присущими им группами равноправности: $\overset{\circ}{K}$ для изотропного, $G_{\overset{\circ}{K}} \supset O$, и $\overline{K}_0$ для твердого тела, $G_{\overline{K}_0}$. Соответствие между этими отсчетными конфигурациями и группами равноправности устанавливается приведенной в монографии [5] теоремой.

Теорема 1.

$$G_{\overset{\circ}{K}} = G_{\overline{K}_0} = O. \qquad (65)$$

Иначе говоря, в данном случае неискаженные конфигурации имеют совпадающие группы равноправности O.

Заметим, что для изотропного тела O *является "наименьшей" группой равноправности в неискаженной конфигурации, тогда как для твердого тела* O — *"наибольшая" группа равноправности в неискаженной конфигурации; в случае изотропного твердого тела они совпадают.*

Доказательство. В соответствии с последним утверждением п. 10, группа равноправности изотропного материала $G_{\overset{\circ}{K}}$ либо равна O, либо равна U ($G_{\overset{\circ}{K}} = O$ или $G_{\overset{\circ}{K}} = U$). Поскольку $\overset{\circ}{K}$ и $\overline{K}_0$ — конфигурации изотропного твердого тела, существует преобразование **p**: $\overset{\circ}{K} \to \overline{K}_0$; градиент этого преобразования обозначим, как и ранее $\mathbf{P} \equiv \overset{\overset{\circ}{K}}{\nabla}\mathbf{p}$. Если $G_{\overset{\circ}{K}} = U$, то в соответствии с (61) группой равноправности для $\overline{K}_0$ будет унимодулярная группа U, $G_{\overline{K}_0} = U$, что противоречит (64). Таким образом, $G_{\overset{\circ}{K}} = O$; любой элемент $\overset{\circ}{\mathbf{H}}$ этой группы равноправности есть элемент O.

Далее, по определению группы равноправности твердых тел $G_{\overline{K}_0} \subset O$, т. е. любой элемент $\overline{\mathbf{H}}_0$ этой группы также элемент O. Согласно (61) $\overline{\mathbf{H}}_0 = \mathbf{P}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{P}$, или $\mathbf{P} \cdot \overline{\mathbf{H}}_0 = \overset{\circ}{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{P} \overset{\text{об}}{=} \mathbf{A}$. В силу невырожденности $\mathbf{P}, \overline{\mathbf{H}}_0, \overset{\circ}{\mathbf{H}}$ тензор **A** также невырожден. Тогда справедливо единственное полярное разложение **A**: $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}$, $\mathbf{U} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{1/2} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{V} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A})^{1/2} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}$. Аналогичное разложение справедливо для тензора **P**: $\mathbf{P} = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{V}_0$, $\mathbf{U}_0 = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}})^{1/2} = \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{V}_0 = (\mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P})^{1/2} = \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{R}_0$. Подставляя выражение **P** в соотношение для **A**, получаем: $\mathbf{A} = \mathbf{U}_0 \cdot (\mathbf{R}_0 \cdot \overline{\mathbf{H}}_0) = (\overset{\circ}{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{R}_0) \cdot \mathbf{V}_0$. Сопоставляя соотношения для **U** и $\mathbf{U}_0$, **V** и $\mathbf{V}_0$, нетрудно увидеть, что $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$, а тогда в силу единственности полярного разложения **A** получаем: $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \cdot \overline{\mathbf{H}}_0 = \overset{\circ}{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{R}_0$, откуда $\overline{\mathbf{H}}_0 = \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{R}_0$. Поскольку $G_{\overset{\circ}{K}} = O$, из последнего соотношения следует, что $G_{\overline{K}_0} = O$.

В общем случае группой равноправности твердого тела по отношению к неискаженной конфигурации может являться любая подгруппа ортогональной группы. Наибольший интерес при этом представляют специальные классы анизотропии, связанные с известными классами оптической симметрии существующих в природе кристаллических тел.

Прежде чем перейти к механической интерпретации классов симметрии и рассмотрению соответствующих групп равноправности, приведем краткие сведения из физики твердого тела (ФТТ) [7,8].

Правильное (периодическое) расположение составляющих кристалл атомов (ионов) определяет его симметрию. Остановимся на операциях симметрии, оставляющих кристалл инвариантными, т. е. таких пространственных преобразованиях, которые переводят в саму себя совокупность атомов, образующих решетку кристалла.

Классы симметрии устанавливаются с помощью ***вещественной аффинной группы*** A*, которая состоит из всех возможных трансляций и ортогональных преобразований трехмерного пространства. Общий вид такого преобразования следующий:*

$$\mathbf{r}' = \mathbf{O}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{a}, \tag{66}$$

где **O** *— элементы полной ортогональной группы,* **a** *— вектор произвольной трансляции. В ФТТ это преобразование часто записывают в виде*

$$\mathbf{r}' = \{\, \mathbf{O} \mid \mathbf{a}\}\, \mathbf{r}. \tag{67}$$

Каждый элемент вещественной аффинной группы состоит из двух частей: ***точечного преобразования*** **O** *и* ***трансляции*** **a**. *Точечные преобразования, включающие* ***"чистые" вращения и вращения с отражениями (инверсией)****, описываются ортогональными тензорами 2-го ранга.*

Под произведением двух элементов группы вещественных аффинных преобразований понимается суперпозиция (повторное применение) операторов:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{O}_1 \cdot (\mathbf{O}_2 \cdot \mathbf{r} + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_1 = \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{O}_2 \cdot \mathbf{r} + \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1,$$

откуда

$$\{\, \mathbf{O}_1 \mid \mathbf{a}_1 \,\}\, \{\mathbf{O}_2 \mid \mathbf{a}_2 \,\} = \{\, \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{O}_2 \mid \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1\}, \tag{68}$$

так что результирующее преобразование принадлежит той же группе вещественных аффинных преобразований A.

Единичным элементом A *является* $\{\mathbf{E} \mid \mathbf{0}\}$*, где* **E** *— тождественное преобразование (единичный тензор 2-го ранга). С использованием (68) нетрудно показать, что обратным элементом* $\{\mathbf{O} \mid \mathbf{a}\}^{-1}$ *является преобразование*

$$\{\mathbf{O} \mid \mathbf{a}\}^{-1} = \{\mathbf{O}^{-1} \mid -\mathbf{O}^{-1} \cdot \mathbf{a}\}. \tag{69}$$

Введем понятие ***пространственной группы кристалла*** C*, под которой понимаются все пространственные преобразования, переводящие кристалл в самого себя. Нетрудно увидеть, что пространственная группа* C *является подгруппой вещественной аффинной группы,* $C \subset A$.

Наиболее характерным инвариантным пространственным преобразованием кристаллов является трансляция. Преобразования трансляции образуют подгруппу C*, элементы которой называются* ***допустимыми трансляциями*** *и определяются целочисленными линейными комбинациями трех линейно независимых элементарных трансляций с векторами* $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$. *Отметим, что выбор допустимых трансляций неоднозначен, что иллюстрируется на примере плоской системы.* ***Совокупность всех допустимых трансляций образует пространственную решетку, соответствующую пространственной группе рассматриваемого кристалла.*** *Пространственную решетку можно рассматривать как систему элементарных ячеек (параллелепипедов), касающихся друг друга и непрерывно заполняющих пространство.*

Необходимо различать два фундаментальных понятия — кристаллическую структуру материала и пространственную решетку кристалла. Структура кристалла — это конкретное расположение микрочастиц (атомов, ионов) в пространстве.

“Пространственная решетка — это способ представления периодичности повторения в пространстве отдельных материальных частиц или групп частиц (или “пустых мест” между частицами). Узел решетки не обязательно отождествляется с атомом, ионом или другой частицей. Следует помнить, что кристаллическая структура — это физическая реальность, а пространственная решетка — лишь геометрическое построение, помогающее выявить законы симметрии или наборы симметричных преобразований кристаллической структуры [7]”.

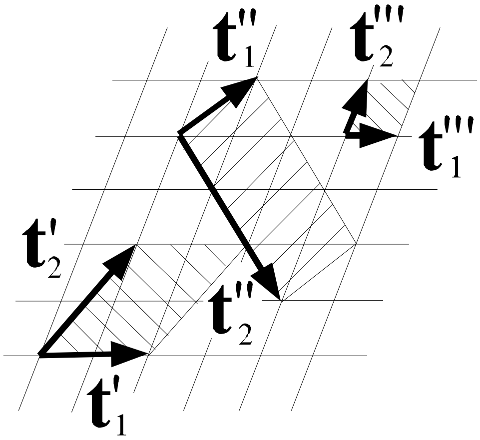

Рис. 1

Аналогично допустимым трансляциям выбор элементарных ячеек неоднозначен (рис. 1). При выборе ячеек решетки обычно руководствуются следующими положениями: ячейка должна а) наилучшим образом отражать свойства симметрии кристаллической решетки (т. е. содержать все центры, оси и плоскости симметрии, присущие решетке; б) по возможности иметь перпендикулярные ребра; в) обладать наименьшим объемом. Такая ячейка называется базисной или основной, из нее путем последователь-

ных трансляций вдоль ребер может быть получена вся кристаллическая решетка. Элементарная базисная ячейка, содержащая восемь узлов в вершинах параллелепипеда, называется ***примитивной (решеткой Браве)****, в противном случае ячейка называется сложной. Сложная кристаллическая решетка может быть представлена совокупностью вложенных друг в друга решеток Браве.*

Широкое применение в ФТТ имеет так называемая элементарная ***ячейка Вигнера-Зейтца****. Последняя определяется как геометрическое место точек, расположенных ближе к фиксированному узлу решетки, чем ко всем остальным. Элементарная ячейка Вигнера-Зейтца определяется совокупностью плоскостей, проведенных через середины отрезков (и ортогональных этим отрезкам), которые соединяют выделенный фиксированный узел* $\mathbf{r}_0$ *со всеми соседними узлами решетки* $\mathbf{r}_i$*. Очевидно, что решетка Вигнера-Зейтца обладает центральной симметрией, поскольку узлу* $\mathbf{r}_i$ *с "относительным" вектором* $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$ *соответствует узел* $\mathbf{r}'_i$ *с "относительным" вектором* $(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_0) = -(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)$.

Точечные преобразования $\mathbf{O}$ *элементов пространственной группы* $\{\mathbf{O}|\,\mathbf{a}\}$ *сами образуют группу, называемую* ***точечной группой*** *кристалла. Последняя обладает следующим важным свойством: решетка пространственной группы должна оставаться инвариантной по отношению ко всем элементам точечной группы, соответствующей данной пространственной. Указанное свойство, во-первых, ограничивает множество всевозможных точечных групп, так как не все (полные) ортогональные преобразования (вращения и вращения с инверсией) сохраняют инвариантной решетку; во-вторых, позволяет классифицировать решетки в соответствии с точечными группами, по отношению к которым эти решетки инвариантны.*

Все вращения и вращения с инверсией, оставляющие инвариантной решетку, образуют группу, характеризующую так называемую ***голоэдрию*** *рассматриваемой решетки. Голоэдрия может соответствовать различным кристаллическим решеткам и характеризуется расположением, числом и порядком осей симметрии.*

Пусть решетка переходит сама в себя при повороте вокруг некоторой оси на угол $2\pi/n$ $(n=1,2,...)$*; тогда данная ось называется* ***осью симметрии*** *или* ***поворотной осью n-го порядка*** *и обозначается как* C_n*. Если решетка переходит сама в себя при повороте на угол* $2\pi/n$ $(n=1,2,...)$ *вокруг некоторой оси и одновременном отражении относительно плоскости, перпендикулярной к этой оси, то последнюю называют* ***зеркально-поворотной осью n-го порядка*** *и обозначают как* S_n*. В ФТТ показано, что поворотные и зеркально-поворотные оси (симметрии) кристалла могут быть только осями 2-го, 3-го, 4-го и 6-го порядков.*

Остановимся на некоторых понятиях кристаллографии [8].

Элементы симметрии (плоскости, оси, центры) встречаются в кристаллах в различных сочетаниях. Существуют оси симметрии, которые яв-

ляются единственными, не повторяющимися с помощью операций симметрии, присущих данному кристаллу (например, отражения относительно плоскости симметрии). Такие направления называются особыми или единичными. К ним относится, например, ось шестого порядка в шестигранной призме. В то же время в кубе вообще отсутствуют единичные направления, для любой оси симметрии можно найти эквивалентные ей.

По свойствам симметрии и числу единичных направлений кристаллы подразделяются на ***три категории: высшую, среднюю и низшую****.*

К ***высшей*** *категории относятся кристаллы, не имеющие особых направлений, имеющие несколько осей симметрии порядка выше второго. Анизотропия в таких кристаллах выражена слабее всего. Внешняя форма кристаллов высшей категории симметрии является "изометричной", т. е. развита примерно одинаково по всем направлениям (куб, октаэдр).*

Кристаллы ***средней*** *категории имеют одно особое направление - одну ось симметрии порядка выше второго. Анизотропия физических свойств более ярко выражена, особенно в направлениях вдоль особой (главной) оси симметрии и перпендикулярно ей. Характерные формы кристаллов данной категории -призмы, пирамиды.*

К ***низшей*** *категории относятся кристаллы, не имеющие осей симметрии порядка выше второго, и (или) обладающие несколькими особыми направлениями. Эти кристаллы имеют наиболее ярко выраженную анизотропию свойств.*

Три категории кристаллов подразделяются на семь ***кристаллических систем*** *или* ***сингоний*** *(сингония (греч.) — сходноугольность). В сингонию объединяются типы кристаллов, имеющих одинаковую симметрию элементарных ячеек и одинаковый тип (кристаллографической) системы координат. В общем случае последние представляют собой косоугольные системы координат с различными масштабными отрезками вдоль разных осей. Отметим, что в кристаллографии используется только правая система координат. Выбор системы координат согласуется с симметрией рассматриваемого кристалла. Оси координат выбираются по осям симметрии или по нормалям к плоскостям симметрии, а при недостаточности этих элементов — по ребрам кристаллического многогранника (как в кристаллах низшей категории симметрии)*

К ***высшей категории*** *относится одна* ***сингония — кубическая.*** *Кристаллографическая система координат здесь — декартова ортогональная.*

Средняя категория *содержит* ***три сингонии — тригональную, тетрагональную и гексагональную.*** *Кристаллографические системы координат в этом случае — косоугольные декартовы, в качестве оси обычно принимается главная ось симметрии (особое направление). Ось Ox^3 перпендикулярна плоскости Ox^1x^2, масштабные отрезки по осям Ox^1 и Ox^2 одинаковы, так что анизотропия кристаллов характеризуется обычно геометрическим параметром, равным отношению масштабов вдоль осей Ox^3 и Ox^1 (или Ox^2).*

*К **низшей категории** относятся **три сингонии — ромбическая, моноклинная и триклинная.** Система координат здесь или декартова ортогональная (для ромбической) или косоугольная декартова (для моноклинной (с осью* Ox^3 *перпендикулярной плоскости симметрии* Ox^1x^2*) и триклинной), с различными масштабами вдоль всех трех осей.*

Остановимся подробнее на известных семи кристаллических системах (сингониях) и четырнадцати типах решетки Браве.

*1. **Триклинная система**. Элементарная ячейка (рис. 2) в этом случае представляет произвольный параллелепипед (с ребрами различной длины и произвольными углами). Допустимые трансляции имеют различные длины и углы между векторами трансляции. Триклинная система не обладает поворотными осями (симметрии).*

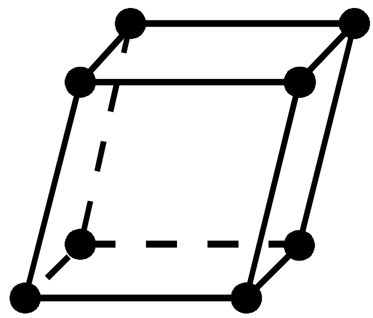

Рис. 2

*2. **Моноклинная система.** Элементарная ячейка (рис. 3) представляет собой прямоугольную призму, в основании которой лежит параллелограмм общего вида. Существуют два типа решетки данной системы — простая* Γ_m *и базоцентрированная (*Γ'_m*), образуемая из простой добавлением узлов в центры одной из пар прямоугольных граней. Голоэдрия моноклинной системы характеризуется наличием **одной поворотной оси (симметрии) второго порядка** (*C_2*).*

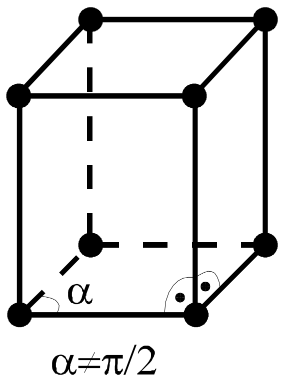

Рис. 3

*3. **Орторомбическая (ромбическая) система**. Элементарной ячейкой является прямоугольный параллелепипед с неравными ребрами. Существуют четыре типа решеток данной системы: простая (*Γ_v*), базоцентрированная (*Γ'_v*), гранецентрированная (*Γ''_v*) и объемноцентрированная (*Γ'''_v*).*

Простая решетка Γ_v *имеет один атом. Базоцентрированная решетка* Γ'_v *образуется из простой добавлением в центры одной из пар параллельных граней узлов; решетка* Γ'_v *содержит два узла и может быть образована наложением двух простых решеток* Γ_v*. Гранецентрированная решетка* Γ''_v *образуется из простой добавлением узлов в центры всех шести граней; решетка содержит 4 узла и может быть образована совокупностью четырех вложенных решеток* Γ_v*. Наконец, объемноцентрированная решетка* Γ'''_v *образу-*

ется из простой добавлением узла в центр параллелепипеда, содержит два узла и образуется двумя простыми решетками.

Голоэдрия орторомбической системы характеризуется ***наличием трех неэквивалентных поворотных осей второго порядка****.*

4. ***Тетрагональная система.*** *Элементарная решетка* Γ_q *представляет собой прямоугольный параллелепипед с квадратом в основании, т. е.* Γ_q *можно рассматривать как частный случай решетки* Γ_v *(орторомбической). Имеются две разновидности решеток данной системы — простая* Γ_q *и объемноцентрированная* Γ'_q.

Голоэдрия тетрагональной системы характеризуется ***одной осью симметрии 4-го порядка и двумя неэквивалентными осями 2-го порядка*** *(одна из них параллельна ребру, а вторая — диагонали квадрата, лежащего в основании).*

5. ***Тригональная система.*** *Решетка тригональной (или ромбоэдрической) системы* Γ_{rh} *образуется из равноотстоящих плоских решеток, каждая из которых состоит из равносторонних треугольников, сдвинутых относительно друг друга (рис. 4). Сдвиг осуществляется таким образом, что узлы второго слоя находятся над центрами треугольников первого слоя, а узлы третьего слоя — над центрами треугольников второго слоя. Далее выполняются условия периодичности (узлы n-го слоя расположены перпендикулярно базовой плоскости над узлами (n-3)-го слоя на расстоянии 3a от (n-3)-го слоя; a — расстояние между слоями).*

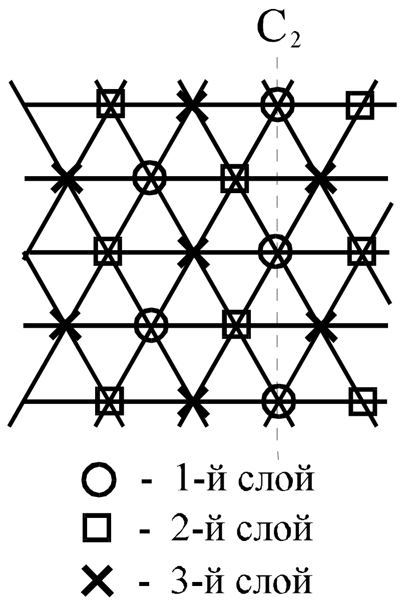

Рис. 4

Голоэдрия данной системы характеризуется ***осью симметрии 3-го порядка****, перпендикулярной базовой плоскости и лежащей в последней* ***осью симметрии 2-го порядка.***

6. ***Гексагональная система.*** *Решетка гексагональной системы* Γ_h*, как и в предыдущем случае, может быть получена путем сдвигов плоских решеток перпендикулярно базовой плоскости. Ячейка (рис. 5) представляет собой прямоугольную призму с правильным шестиугольником в основании.*

Голоэдрия гексагональной решетки характеризуется осью симметрии 6-го порядка и двумя неэквивалентными осями симметрии 2-го порядка, параллельными плоскости основания.

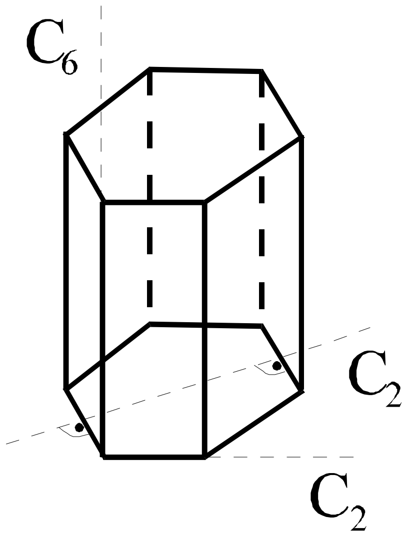

Рис. 5

7. ***Кубическая система****. Имеются три разновидности решеток данной системы: простая* Γ_c*, гранецентрированная* Γ'_c *и объемноцентрированная* Γ''_c*. Простая решетка представляет собой куб с узлами в вершинах. Кубическую систему можно рассматривать как частный случай двух предшествующих систем (орторомбической и тетрагональной).*

Голоэдрия кубической системы характеризуется ***осью 2-го порядка*** *(диагональ грани),* ***осью 3-го порядка*** *(пространственная диагональ куба) и* ***осью 4-го порядка*** *(ребро куба).*

Приведенные выше классы симметрии могут непосредственно использоваться для установления свойств симметрии монокристаллических представительных объемов (для того или иного масштабного уровня). В то же время свойства симметрии представительных объемов различных тел могут не соответствовать введенным свойствам симметрии (в частности, поликристаллические тела могут иметь свойства симметрии, отличные от свойств составляющих их кристаллических микрообъемов). В связи с этим в МСС используются несколько иные определения типов симметрии тел, связанные с понятием группы равноправности.

С этой целью вводятся специальные обозначения и представление ортогональных тензоров. Пусть $\mathbf{e}$ — некоторый единичный вектор, φ — угол поворота вокруг оси, определяемой вектором $\mathbf{e}$; по соглашению принимается, что при использовании правой системы координат поворот на положительный угол φ видится с конца вектора $\mathbf{e}$ происходящим против хода часовой стрелки, при использовании левой системы координат — по ходу часовой стрелки. Через $\mathbf{R}_\mathbf{e}^\varphi$ обозначается ортогональный тензор ротации, определяющий поворот вокруг оси $\mathbf{e}$ на угол φ. Как известно [4], тензор $\mathbf{R}_\mathbf{e}^\varphi$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}}^{\varphi} = \mathbf{E}\cos\varphi + \mathbf{ee}(1-\cos\varphi) - \mathbf{e}\times\mathbf{E}\sin\varphi. \qquad (70)$$

Для дальнейшего рассмотрения будет использоваться также тройка орто-нормированных векторов $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$ $(i = 1,\ldots,3)$.

В МСС принята следующая классификация исследуемых твердых тел.

1. ***Триклинным*** называется материал, группа равноправности неискаженной конфигурации которого является минимальной, $G_{\overset{\circ}{K}} = \{\mathbf{E}, -\mathbf{E}\}$.

2. Для ***моноклинного*** материала физически реализуемая группа равноправности неискаженной конфигурации $G^{+}_{\overset{\circ}{K}}$ содержит преобразование ротации на угол π вокруг одной фиксированной (по отношению к материалу) оси, например, $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}_1}^{\pi} = 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{E} = (\mathbf{R}_{\mathbf{e}_1}^{\pi})^{\mathrm{T}}. \qquad (71)$$

3. ***Ортотропными*** называются материалы, для которых группа равноправности неискаженной конфигурации $G^{+}_{\overset{\circ}{K}}$ включает повороты на угол π вокруг трех взаимно ортогональных осей $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}_i}^{\pi} = 2\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i - \mathbf{E}, \quad i = 1,\ldots,3; \ \underset{i}{\Sigma}. \qquad (72)$$

Заметим, что в (72) достаточно положить $i = 1,2$, поскольку в силу групповых свойств $\mathbf{R}_{\mathbf{e}_1}^{\pi}\cdot\mathbf{R}_{\mathbf{e}_2}^{\pi} \in G_{\overset{\circ}{K}}$, причем легко показать, что

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}_3}^{\pi} = \mathbf{R}_{\mathbf{e}_1}^{\pi}\cdot\mathbf{R}_{\mathbf{e}_2}^{\pi}.$$

4. Материалы с ***кубической симметрией*** в качестве группы равноправности неискаженной конфигурации (физически реализуемой) $G^{+}_{\overset{\circ}{K}}$ имеют ортогональные преобразования — ротации на угол $\pi/2$ вокруг трех взаимно ортогональных направлений:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}_i}^{\pi/2} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}\mathbf{e}_{i+2} - \mathbf{e}_{i+2}\mathbf{e}_{i+1}, \ \underset{i}{\Sigma}, \qquad (73)$$

индексы взяты по модулю 3.

5. Материал называется ***трансверсально изотропным*** по отношению к направлению $\mathbf{e}_3$, например, если его неискаженная конфигурация в качестве физически реализуемой группы равноправности $G^{+}_{\overset{\circ}{K}}$ имеет подгруппу произвольных поворотов вокруг оси $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}_3}^{\varphi} = \mathbf{E}\cos\varphi + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3(1-\cos\varphi) - \mathbf{e}_3\times\mathbf{E}\sin\varphi. \qquad (74)$$

6. Наконец, ***изотропный материал*** в качестве группы равноправности $G^{+}_{\overset{\circ}{K}}$ неискаженной конфигурации имеет тензоры ротации относительно произвольно расположенной оси **e** на произвольный угол φ, т. е. в качестве $G^{+}_{\overset{\circ}{K}}$ выступает вся собственно ортогональная группа.

Следует подчеркнуть, что в данной классификации не рассматриваются особенности атомно-молекулярного строения реального материала, классификация характеризует особенности реакции материала на воздействия для анализируемого представительного объема. При этом реальное тело может не обладать (строгим) кристаллическим строением. В то же время для монокристаллов использование ранее введенных типов симметрии является весьма эффективным средством, т. к. позволяет априори установить симметрию анализируемого материала.

Отметим, что при установлении классов симметрии материалов неявным образом подразумевается использование для этой цели естественной конфигурации, принимаемой в качестве отсчетной. Действительно в противном случае с применением определенных аффинных преобразований можно произвольным образом менять симметрию структуры материала (а следовательно, и симметрию отклика материала на дальнейшее деформирование из полученной конфигурации, если рассматривать ее в качестве отсчетной).

Для произвольных твердых тел существуют лишь некоторые специальные конфигурации, которые могут считаться неискаженными, т. е. такими, для которых $G_{\overset{\circ}{K}} \subset O$. Действительно, пусть $\overset{\circ}{K}_1$ — неискаженная конфигурация, $G_{\overset{\circ}{K}_1} \subset O$ — группа равноправности $\overset{\circ}{K}_1$. Предположим, что преобразование $\mathbf{p}(\cdot)$ переводит конфигурацию $\overset{\circ}{K}_1$ в конфигурацию $\overset{\circ}{K}_2$, $\mathbf{p}$: $\overset{\circ}{K}_1 \to \overset{\circ}{K}_2$, $\mathbf{P} = \overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla}\mathbf{p}$. В соответствии с соотношением Нолла (61) элементы $\mathbf{H}_2$ группы равноправности $G_{\overset{\circ}{K}_2}$ конфигурации $\overset{\circ}{K}_2$ получаются из элементов $\mathbf{H}_1 = \mathbf{O}_1 \in O$ группы равноправности $G_{\overset{\circ}{K}_1}$ конфигурации $\overset{\circ}{K}_1$ следующим образом:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{P} \equiv \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{P}. \tag{75}$$

Очевидно, что в общем случае

$$\mathbf{H}_2 \notin O, \; \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_2^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P}^{-\mathrm{T}} \neq \mathbf{E}.$$

Заметим, что если $\mathbf{P} \in \mathrm{O}$, то элементы $\mathbf{H}_2 \in \mathrm{O}$ и в этом случае $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2$ может рассматриваться в качестве неискаженной конфигурации, $G_{\overset{\circ}{K}_2} \subset O$; при этом "мощности" групп равноправности $G_{\overset{\circ}{K}_1}$ и $G_{\overset{\circ}{K}_2}$ совпадают. Если $G_{\overset{\circ}{K}_1} = O$, то в данном случае и $G_{\overset{\circ}{K}_2} = O = G_{\overset{\circ}{K}_1}$.

В связи с рассмотренным частным случаем преобразования $\mathbf{P}$: $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1 \to \overset{\circ}{\mathrm{K}}_2$ возникает вопрос: **каково должно быть преобразование P, чтобы получаемая с его помощью из $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1$ конфигурация $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2$ была неискаженной конфигурацией того же материала?**

Для твердого тела существуют два предельных случая, поэтому остановимся прежде всего на них. Группой равноправности триклинного материала является "самая бедная" группа $\{\mathbf{E},-\mathbf{E}\}$. В данном случае любое преобразование $\mathbf{P}$ переводит неискаженную конфигурацию $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1$ в неискаженную конфигурацию $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2$ с той же группой равноправности: $\mathbf{H}_2 = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} \cdot (\pm\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P} = \pm\mathbf{E}$.

Другим предельным случаем для твердых тел является группа равноправности изотропных тел, где $G_{\overset{\circ}{K}_1} = O$; элементы группы $G_{\overset{\circ}{K}_1}$ будем обозначать как $\mathbf{O}_1$. Из эвристических соображений нетрудно установить класс преобразований $\mathbf{P}$: $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_1 \to \overset{\circ}{\mathrm{K}}_2$, который не изменяет группы равноправности. Действительно, положив $\mathbf{P} = \mathrm{k}\mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — произвольный ортогональный тензор, получаем, что $\forall\, \mathbf{O}_1 \in G_{\overset{\circ}{K}_1} = O$ существует $G_{\overset{\circ}{K}_2} \ni \mathbf{H}_2 = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{R} \equiv \mathbf{O}_2 \in O$. При этом, если $\mathbf{O}_1$ "пробегает" все значения из O, $\mathbf{O}_2$ также принимает все значения из O, т. е. $G_{\overset{\circ}{K}_2} = O$. Иначе говоря, в этом случае конфигурация $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_2$ является также неискаженной конфигурацией изотропного тела.

Отметим, что рассматриваемое преобразование (деформация) $\mathbf{P} = \mathrm{k}\mathbf{R}$ ($\mathrm{k} \neq 0$) не изменяет углов между материальными отрезками; такая деформация называется ***конформной***. В данном случае деформация $\mathbf{P} = \mathrm{k}\mathbf{R}$ преобразует материальные элементы $\mathrm{d}\mathbf{R}'_{01}, \mathrm{d}\mathbf{R}''_{01} \in \overset{\circ}{\mathrm{K}}_1$ в материальные элементы $\mathrm{d}\mathbf{R}'_{02}, \mathrm{d}\mathbf{R}''_{02} \in \overset{\circ}{\mathrm{K}}_2$, при этом углы между $\mathrm{d}\mathbf{R}'_{0i}, \mathrm{d}\mathbf{R}''_{0i}$ $(\mathrm{i}=1,2)$ сохраняются, а длина изменяется в k раз для всех элементов одновременно $(|\mathrm{d}\mathbf{R}'_{02}| = \mathrm{k}|\mathrm{d}\mathbf{R}'_{01}|,\ |\mathrm{d}\mathbf{R}''_{02}| = \mathrm{k}|\mathrm{d}\mathbf{R}''_{01}|)$.

Представляя $\mathbf{P} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{p} = \mathrm{k}\mathbf{R}$ полярным разложением $\mathbf{P} = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{R}_0$, нетрудно увидеть, что $\mathbf{U}_0 = \mathrm{k}\mathbf{E}$, $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}$. Отметим, что для единичного тензора (а следовательно, и для $\mathbf{U}_0 = k\mathbf{E}$) собственными векторами может быть любая тройка взаимно ортогональных векторов. Множество собственных векторов произвольного тензора **A** (второго ранга) называется ***характеристическим пространством*** данного тензора. Таким образом, характеристическое пространство тензора $\mathbf{U}_0$ в данном случае совпадает с трехмерным пространством E^3.

Общий ответ на вопрос о возможных преобразованиях $\mathbf{P}$: $\overset{\circ}{K}_1 \to \overset{\circ}{K}_2$, сохраняющих группу равноправности изотропного твердого тела $G_{\overset{\circ}{K}_1} = O$, дает следующая приведенная здесь без доказательства теорема.

Теорема 2 [5].

Для изотропного твердого тела преобразование p переводит одну неискаженную конфигурацию в другую неискаженную конфигурацию тогда и только тогда, когда оно конформно.

В случае отличия **P** от k**R** группа равноправности $G_{\overset{\circ}{K}_2}$ содержит тензоры, отличные от ортогональных, а следовательно, не является неискаженной конфигурацией изотропного твердого тела.

В "промежуточных" случаях, когда $G_{\overset{\circ}{K}} \subset O$, но $G_{\overset{\circ}{K}} \neq O$ и $G_{\overset{\circ}{K}} \neq \{\mathbf{E}, -\mathbf{E}\}$, определить класс деформаций, переводящих одну неискаженную конфигурацию в другую неискаженную конфигурацию, позволяет также приводимая здесь без доказательства теорема 3.

Теорема 3 (Колеман, Нолл) [5].

Преобразование (деформация) p переводит одну неискаженную конфигурацию $\overset{\circ}{K}$ твердого тела в другую неискаженную конфигурацию того же тела тогда и только тогда, когда характеристические пространства левого тензора искажений $\mathbf{U}_0$ градиента деформации $\mathbf{P} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{p}$ инвариантны относительно всех поворотов, входящих в группу равноправности $G_{\overset{\circ}{K}}$.

Прокомментируем содержание и смысл теоремы 3. Прежде всего остановимся на понятии характеристического пространства. Предположим, что тензоры из некоторого множества тензоров 2-го ранга $\mathbf{A}^{(k)}$, k=1,2,... *представимы в виде*

$$\mathbf{A}^{(k)} = \sum_{i=1}^{3} A_i^{(k)} \mathbf{a}^i \mathbf{a}_i ,$$

где $\mathbf{a}_i$ (i=1,...,3) — *тройка фиксированных взаимно ортогональных собственных векторов,* $A_i^{(k)}$ — *различные в общем случае собственные значения тензоров* $\mathbf{A}^{(k)}$. *В этом случае характеристическим пространством рассматри-*

ваемого множества тензоров является тройка взаимно ортогональных осей, направленных вдоль $\mathbf{a}_i$ (i=1,...,3).

Для множества тензоров $\mathbf{A}^{(k)}$*, каждый из которых представим в виде*

$$\mathbf{A}^{(k)} = \mathrm{A}^{(k)}\mathbf{aa} + \sum_{i,j=1}^{2} \mathrm{B}^{(k)ij}\mathbf{b}_i^{(k)}\mathbf{b}_j^{(k)}, \quad \mathrm{B}^{(k)ij} = \mathrm{B}^{(k)ji},$$

где $\mathbf{a}$ *— фиксированный единичный вектор,* $\mathbf{b}_i^{(k)}$ *расположены в фиксированной плоскости, перпендикулярной* $\mathbf{a}$*, характеристическим пространством рассматриваемого множества тензоров является совокупность прямой, направленной вдоль* $\mathbf{a}$*, и перпендикулярной ей плоскости.*

Рассмотрим, например, моноклинный кристаллический материал, группа равноправности неискаженной конфигурации которого $\mathbf{R}_{\mathbf{e}_1}^{\pi}$*. Очевидно, что если при деформациях ось* $\mathbf{e}_1$ *остается перпендикулярной осям* $\mathbf{e}_2$ *и* $\mathbf{e}_3$ *(угол между* $\mathbf{e}_2$ *и* $\mathbf{e}_3$ *может измениться), тогда материал остается моноклинным, хотя и с другими параметрами решетки (т. е. “начальными” свойствами). При этом группа равноправности материала не изменится, ее образуют те же преобразования с помощью собственно ортогонального тензора* $\mathbf{R}_{\mathbf{e}_1}^{\pi} \in \mathrm{O}$*. Согласно определению “новую” конфигурацию также следует признать неискаженной конфигурацией моноклинного материала.*

В случае, если деформации исходной конфигурации $\overset{\circ}{\mathrm{K}}$ *приводят к искажению прямого угла между осями* $\mathbf{e}_1$ *и* $\mathbf{e}_2$ *(и/или* $\mathbf{e}_3$*), материал превращается в триклинный. Полученную конфигурацию* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}{}'$ *также можно признать неискаженной конфигурацией, однако для другого (триклинного) твердого материала, с другой группой равноправности* $\mathrm{G}_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}{}'} = \{\mathbf{E}, -\mathbf{E}\}$.

Для неизменности группы равноправности моноклинного материала необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_3$ *при любой деформации* $\mathbf{p}$ *из неискаженной конфигурации* $\overset{\circ}{\mathrm{K}}$*. В этом случае один из собственных векторов левой меры искажения* $\mathbf{U}_0$ *должен быть ортогонален векторам* $\mathbf{e}_2$ *и* $\mathbf{e}_3$*, т. е.*

$$\mathbf{U}_0 = \mathrm{k}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \sum_{i,j=1}^{2} \mathrm{U}_0^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad \mathrm{U}_0^{ij} = \mathrm{U}_0^{ji}.$$

Характеристическое пространство в данном случае — декартово произведение прямой вдоль вектора $\mathbf{e}_1$ *и плоскости, содержащей векторы* $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *; характеристическое пространство меры* $\mathbf{U}_0$ *не меняется при поворотах на угол* π *вокруг оси* $\mathbf{e}_1$.

Для кубического материала группа равноправности неискаженной конфигурации включает все повороты на угол $\pi/2$ *вокруг осей* $\mathbf{e}_i$, i=1,...,3, $(\mathbf{R}_{\mathbf{e}_1}^{\pi/2})$*. Очевидно, группа равноправности не изменится, если из этой неискаженной конфигурации перейти к новой одновременным растяжением* *(или сжатием) в* k *раз вдоль ребер куба; при этом углы между* $\mathbf{e}_i$ *остаются прямыми. Следовательно, в этом случае тензор* $\mathbf{U}_0$ *должен быть шаровым,* $\mathbf{U}_0 = k\mathbf{E}$. *Характеристическое пространство* $\mathbf{U}_0$ *есть пространство* E^3, *и очевидно, что оно не изменяется при любых преобразованиях* $\mathbf{R}_{\mathbf{e}_i}^{\pi/2}$, $i = 1,\ldots,3$.

Следует отметить, что при установлении групп равноправности необходимо оперировать с материальными осями, в связи с чем и характеристическое пространство также определяется в терминах материальных осей.

Наконец, остановимся на изотропном материале, группой равноправности неискаженной конфигурации $\overset{\circ}{K}$ *которого является ортогональная группа* O. *Чтобы некоторая новая конфигурация* $\overset{\circ}{K}'$ *могла быть признана неискаженной конфигурацией изотропного твердого тела, необходимо, чтобы* $G_{\overset{\circ}{K}'} = G_{\overset{\circ}{K}} = O$. *С математической точки зрения, как уже отмечалось выше, это приводит к тензору преобразования* $\mathbf{P}$: $\overset{\circ}{K} \to \overset{\circ}{K}'$, *для которого левый тензор искажения является шаровым,* $\mathbf{U}_0 = k\mathbf{E}$. *Характеристическое пространство последнего есть* E^3, *которое не меняется при любых ортогональных преобразованиях. С физической точки зрения известно, что материал можно считать изотропным, если отсутствуют или малы отклонения от равномерного закона распределения ориентации кристаллической решетки, размеров и формы структурных составляющих (зерен, фрагментов) материала. Таким образом, характеристики должны меняться с сохранением закона равномерного распределения.*

12. Краткие сведения о жидкости

Понятие жидкости в МСС вводится для достаточно широкого класса тел, являющихся моделями реальных жидкостей и газов. Равно как и для твердых тел, для жидкости существуют различные определения, также большей частью носящие описательных характер. Часто эти определения опираются на свойство жидкости "течь" под действием приложенных нагрузок. Однако само понятие "течения" расплывчато и может охватывать как все материалы — когда речь идет о деформировании исследуемой среды под действием нагрузок, — так и ограничиваться применимостью к очень узкому классу материалов, не включающему даже реальные материалы, традиционно относимые к жидкостям (например, полимеры) — если под "течением" понимается способность среды при действии постоянного напряжения деформироваться с постоянной скоростью деформации.

С физической точки зрения жидкость часто определяют как среду, для которой (внутренняя) кинетическая Т и потенциальная П энергия всех микродвижений и взаимодействий, соответственно, имеют примерно одинаковый порядок, $T / P \approx 1$. Однако такое определение не охватывает газы, для которых Т/П >> 1, и которые в МСС традиционно рассматриваются как жидкости.

По аналогии с твердым телом в качестве критерия разделения тел на жидкие и твердые можно было бы использовать степень близости материальных частиц в конфигурациях K_0 и K_t. Понятно, что для жидкостей не сохраняется бесконечная близость частиц, фиксируемая в K_0, для тех же частиц в произвольной конфигурации K_t, $t > t_0$.

В рамках единой теории представляется целесообразным дать единообразные определения, относящиеся к тому или иному компоненту теории, не нарушая стройности последней. Без сомнения, отмеченные физические определения необходимо использовать в качестве поясняющих, иллюстрирующих смысл аксиоматических определений.

В предложенном разделе понятие жидкости вводится на основе понятия равноправности и групп равноправности. При этом используется достаточно хорошо обоснованное экспериментально свойство реальных жидкостей — **отсутствие какой-либо предпочтительной конфигурации и ориентации.** В то же время понятие памяти для жидкости не исключается, реакция материала зависит от истории воздействий. Однако в данном случае в силу отсутствия специальной (естественной, неискаженной) конфигурации для жидкости история определяется по отношению к текущей, актуальной конфигурации, и реакция материала не зависит от того, по отношению к какой актуальной конфигурации определяется история. Иначе говоря, реакция материала в двух отличающихся конфигурациях на одинаковую историю воздействий (в случае простого материала при механических воздействиях

— на историю $\overset{\overset{\circ}{K}_1}{\nabla}\mathbf{r}^t = \overset{\overset{\circ}{K}_2}{\nabla}\mathbf{r}^t$), определенную по отношению к различным (актуальным) конфигурациям, будет одинакова.

Используя приведенные выше рассуждения в качестве "наводящих", можно дать следующее определение.

Определение.

Жидкость есть эгалитарный материал, не являющийся твердым телом.

Ранее отмечалось, что эгалитарный материал в качестве группы равноправности имеет либо минимальную группу $\{\mathbf{E},-\mathbf{E}\}$, либо унимодулярную группу. Поскольку $G_{\overset{\circ}{K}} = \{\mathbf{E},-\mathbf{E}\}$ соответствует твердому телу (триклинный материал), то в силу приведенного выше определения жидкости соответствует группа равноправности $G_{\overset{\circ}{K}} = U$. В соответствии со сказанным формулируется следующая теорема.

Теорема [5].

Материал представляет собой жидкость в том и только в том случае, когда

$$G_{\overset{\circ}{K}} = U \tag{76}$$

для всех $\overset{\circ}{K}$.

Из данной теоремы и предшествующих рассуждений можно сформулировать некоторые следствия.

Следствия [5].

1. Любая жидкость изотропна.

2. Любая конфигурация жидкости является неискаженной.

3. Материал является эгалитарным тогда и только тогда, когда он представляет собой либо жидкость, либо триклинное твердое тело.

4. Материал изотропен в том и только в том случае, если он является либо жидкостью, либо изотропным твердым телом.

Используя полученные результаты, можно показать, что общий вид определяющего соотношения для жидкости следующий:

$$\sigma = -p(\hat{\rho})\mathbf{E} + \mathbf{L}(\mathbf{C}^t_{K_t};\hat{\rho}), \tag{77}$$

где $\hat{\rho}$ — плотность, p — давление, $\mathbf{C}^t_{K_t}$ — история изменения тензора деформаций Коши-Грина, определенная по отношению к актуальной конфигурации, используемой в качестве отсчетной.

В заключение приведем наиболее простые определяющие соотношения жидкостей. В случае, если второй член правой части (77) можно положить равным нулевому тензору $\forall\mathbf{C}^t_{K_t}$, из (77) следует

$$\sigma = -p(\hat{\rho})\mathbf{E}. \tag{78}$$

В этом случае материал называется ***упругой*** или ***эйлеровой жидкостью.*** ОС вида (78) широко используется в гидромеханике, особенно — в газовой динамике.

Ранее (п. 3) было показано, что общий вид ОС для жидкости без памяти имеет вид

$$\sigma = \mathbf{F}(\mathbf{D}, \hat{\rho}) .$$

Принимая частный вид такого соотношения, когда $\mathbf{F}$ является так называемой аффинной функцией своего первого аргумента, приходим к определяющему соотношению ***линейно-вязкой жидкости***, которое приводимо к виду

$$\sigma = (-p + \lambda \mathrm{tr}\mathbf{D})\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D} , \tag{79}$$

где p, λ, μ — функции только $\hat{\rho}$ (λ и μ могут быть постоянными). Указанные ОС носят название ***закона Навье-Стокса***. Коэффициенты λ и μ называются вязкостями жидкости. При $\lambda = \mu = 0$ приходим к упругой (или эйлеровой) жидкости, в силу чего последняя называется иногда ***невязкой*** (или ***идеальной***, или ***совершенной***).

12. Об упругих материалах. Определения

Ранее уже упоминались так называемые материалы без памяти. Одним из наиболее употребимых представителей последних является упругий материал, для которого определяющее отображение $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^t;\mathbf{R}_0,t)$ трансформируется к функции $\mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}$ текущего значения градиента места $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}(t)$ (и других параметров воздействия) , т. е.

$$\sigma = \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r};\mathbf{R}_0). \qquad (80)$$

Согласно теореме Селерье-Рихтера определяющее соотношение упругого материала ***в приведенной форме*** может быть записано в виде

$$\sigma = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{F}_{\overset{\circ}{K}}(\mathbf{U};\mathbf{R}_0) \cdot \mathbf{R}. \qquad (81)$$

Тело, состоящее только из упругих частиц (с малыми окрестностями), называется упругим телом.

Несмотря на наличие в определяющем соотношении (80) некоторой конкретной конфигурации $\overset{\circ}{K}$, как и в более общем случае остается справедливым утверждение **о независимости факта существования определяющего соотношения от выбора отсчетной конфигурации.** Иначе говоря, по имеющимся ОС (80) с использованием градиента преобразования конфигурации $\overset{\circ}{K}$ в любую другую $\overset{\circ}{K}'$ можно определить реакцию материала по отношению к этой новой конфигурации $\overset{\circ}{K}'$. В связи с вышесказанным в дальнейшем индекс “$\overset{\circ}{K}$” при записи ОС упругих материалов опускается.

Следует отметить, что при рассмотрении ОС твердых тел обычно полагается существование естественной конфигурации, и именно естественная конфигурация используется в качестве отсчетной. В этом случае имеем

$$\mathbf{F}(\mathbf{E};\mathbf{R}_0) = \mathbf{0}. \qquad (82)$$

В то же время существование естественной конфигурации не является обязательным элементом построения теории, хотя во многих отношениях весьма удобно.

Для несжимаемых упругих материалов на основе положений теории тел со связями ОС можно записать в виде

$$\sigma = -p\mathbf{E} + \mathbf{F}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r};\mathbf{R}_0), \quad |\det\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}| = 1. \qquad (83)$$

В дальнейшем за исключением специально оговариваемых случаев рассматриваются однородные упругие тела, с однородной отсчетной конфигурацией, так что из записи ОС можно исключить $\mathbf{R}_0$ в качестве независимого аргумента,

$$\sigma=\mathbf{F}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}). \tag{84}$$

С использованием введенного ОС и законов движения Эйлера, можно записать уравнения движения упругого материала (по аналогии с уравнениями Ламе). При этом следует иметь в виду, что в общем случае больших градиентов перемещений актуальная конфигурация (для которой, собственно говоря, и записываются эти уравнения) априори неизвестна. В связи с этим для геометрически нелинейных задач теории упругости предпочтительной представляется их постановка в терминах отсчетной конфигурации. Уравнения движения при этом удобно записывать в терминах первого тензора Пиола-Кирхгоффа, а массовые силы относить к единице объема в отсчетной конфигурации. Кинематические граничные условия при этом не отличаются от записанных в актуальной конфигурации. Несколько сложнее записываются статические граничные условия в $\overset{\circ}{\mathrm{K}}$, поскольку силовые воздействия определяются в действительности для актуальной конфигурации. Переопределение статических граничных условий в терминах отсчетной конфигурации приводит к их нелинейности.

О неединственности решения в общем случае

В общем случае больших градиентов перемещений нелинейность задачи теории упругости обусловлена тремя составляющими: нелинейностью кинематических соотношений, нелинейностью (специальной формой) определяющих соотношений и нелинейностью граничных условий. В связи с этим в настоящее время отсутствует доказательство единственности решения задачи нелинейной теории упругости для общего случая. Указанное обстоятельство обусловлено не только и не столько математическими сложностями, неединственность подтверждается физическими соображениями и примерами.

В качестве примера можно рассмотреть пустотелый круговой цилиндр, закрепленный по внутренней поверхности и закручиваемый на некоторый угол φ по внешней поверхности. Например, можно повернуть внешнюю поверхность на угол $\varphi=180°$ (против хода часовой стрелки) или на угол $\varphi=-180°$ (по ходу часовой стрелки). И в первом, и во втором случае конечное состояние характеризуется одинаковыми кинематическими граничными условиями. Однако градиенты перемещений, компоненты тензора напряжений, естественно, будут отличаться знаками. Другим примером с этим же телом является закручивание внешней поверхности на угол $\varphi=\alpha$ и $\varphi=360°+\alpha$: кинематические граничные условия совпадают, однако решения задачи будут отличаться даже качественно. Иначе говоря, для случая кинематических граничных условий статической геометрически нелинейной задачи теории упругости отсутствует единственность ее решения. *Подчеркнем, что речь идет о задачах теории упругости, где в постановку не должна по определению входить история нагружения. Однако при решении реальных задач в силу наличия нелинейностей различного типа и неединственности решения задачи нелинейной теории упругости ставятся в приращениях, тем самым вводя неявным образом историю нагружения в постановку.*

Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении нелинейных задач теории упругости при задании статических граничных условий. Классическим примером здесь является полая полусфера, для которой существуют два равновесных состояния — исходное и вывернутое, при нулевых граничных нагрузках. Полагая исходное состояние естественным, получаем нулевые поля напряжений в $\overset{\circ}{\mathrm{K}}$. В то же время в вывернутом состоянии напряженное состояние отлично от тривиального, что показывают известные экспериментальные исследования.

Таким образом, в общем случае нелинейной теории упругости отсутствует единственность решения. Существуют доказательства единственности решения для некоторых частных случаев при малых нагрузках и малых градиентах перемещений. Некоторые частные теоремы единственности доказаны в работах Стоппелли и Ван Бюрена.

Об изотропных упругих материалах

Ранее были приведены определения и вид определяющих соотношений для изотропного твердого и для упругого тел. Объединяя эти определения и опираясь на используемые при их введении рассуждения, может быть сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема [5].

Простой материал представляет собой изотропный упругий материал тогда и только тогда, когда относительно некоторой специальной конфигурации, называемой неискаженной, его определяющее соотношение имеет вид

$$\sigma = \mathbf{F}(\mathbf{B}), \tag{85}$$

где $\mathrm{B} = \mathbf{V}^2 = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r} = \hat{\mathbf{G}}^{-1}$ **— так называемый левый тензор Коши-Грина (или мера Фингера), а** $\mathbf{F}$ **удовлетворяет функциональному уравнению**

$$\mathbf{F}(\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{O}) = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{O} \tag{86}$$

$\forall$O$\in$O, $\forall$B. Обратно: если справедливы (85)-(86), то отсчетная конфигурация является неискаженной конфигурацией изотропного упругого тела.

Напомним, что тензорзначные функции, удовлетворяющие (86), называются изотропными. В теории определяющих соотношений одной из важных задач является установление наиболее простой формы ОС, не уменьшающей общности последних и согласующейся с основными аксиомами ТОС. Ответ на вопрос о наиболее простой форме соотношения (85) дает приводимая ниже без доказательства теорема.

Теорема (Ривлин, Эриксен) [5].

Функция F(A), значения и аргументы которой представляют собой симметричные тензоры над n-мерным векторным пространством, изотропна тогда и только тогда, когда она имеет представление вида:

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{A}) = \varphi_0\mathbf{E} + \varphi_1\mathbf{A} + \ldots + \varphi_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}, \qquad (87)$$

где φ_i — изотропные скалярные функции от A,

$$\varphi_i(\mathbf{O}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}) = \varphi_i(\mathbf{A}) \quad \forall\mathbf{O}\in O,\ i=0,\ldots,(n-1). \qquad (88)$$

При этом можно показать, что соотношение (88) выполняется тогда и только тогда, когда скалярные функции φ_i представимы функциями инвариантов тензора **A**:

$$\varphi_i(\mathbf{A}) = \phi_i(I_1(\mathbf{A}),\ldots, I_n(\mathbf{A})). \qquad (89)$$

С использованием приведенных выше соотношений можно записать ОС для изотропного упругого материала (с неискаженной конфигурацией в качестве отсчетной):

$$\sigma = \alpha_0\,\mathbf{E} + \alpha_1\,\mathbf{B} + \alpha_2\,\mathbf{B}^2, \qquad (90)$$

где α_0, α_1, α_2 в соответствии с (89) — функции инвариантов $I_1(\mathbf{B})$, $I_2(\mathbf{B})$, $I_3(\mathbf{B})$.

Последнее соотношение можно преобразовать с учетом теоремы Гамильтона-Кэли:

$$\mathbf{B}^3 - I_1\,\mathbf{B}^2 + I_2\,\mathbf{B} - I_3\,\mathbf{E} = \mathbf{0};$$

умножая на $\mathbf{B}^{-1}$, получим

$$\mathbf{B}^2 = I_1\,\mathbf{B} - I_2\,\mathbf{E} + I_3\,\mathbf{B}^{-1}.$$

Тогда соотношение (90) можно трансформировать к виду

$$\sigma = \beta_0\,\mathbf{E} + \beta_1\,\mathbf{B} + \beta_{-1}\,\mathbf{B}^{-1}, \qquad (91)$$

где β_0, β_1, β_{-1} — также функции инвариантов тензора **B**.

Из полученных ОС вытекают два важных следствия.

Следствие 1.

В изотропном упругом материале главные оси меры деформации, определенной в K_t, совпадают с главными осями тензора напряжений Коши σ.

Следствие 2.

Напряженнное состояние изотропного упругого тела в неискаженной конфигурации является гидростатическим.

Несложно установить, что в отсчетной конфигурации $I_1(\mathbf{B}_0) \equiv I_1(\mathbf{E}) = 3$, $I_3(\mathbf{B}_0) = 1$. Тогда из соотношения (91) следует, что необходимым и достаточным условием того, что отсчетная конфигурация является **естественной**, служит выполнение следующего соотношения:

$$\beta_0(3,3,1) + \beta_1(3,3,1) + \beta_{-1}(3,3,1) = 0. \tag{92}$$

В соответствии с ранее сформулированным для изотропного твердого тела утверждением можно заключить, что деформация $\mathbf{B} = k\mathbf{E}$ переводит одну неискаженную конфигурацию изотропного твердого тела в другую неискаженную конфигурацию. Однако если исходная неискаженная конфигурация являлась естественной, получаемая из нее деформацией $\mathbf{B} = k\mathbf{E}$ новая неискаженная конфигурация в общем случае не является естественной. Действительно, пусть $k \neq 1$, тогда в новой неискаженной конфигурации тензор напряжений Коши определяется соотношением

$$\sigma = [\beta_0(3k,3k^2,k^3) + \beta_1(3k,3k^2,k^3) + \beta_{-1}(3k,3k^2,k^3)]\,\mathbf{E}, \tag{93}$$

при этом нет оснований считать член в квадратных скобках правой части равным нулю.

Из приведенных выше ОС (90) нетрудно увидеть, что собственные значения тензора напряжений Коши σ (главные напряжения) связаны с относительными главными удлинениями $\overset{\circ}{\Lambda}_i = \dfrac{d\hat{S}_i - d\overset{\circ}{S}_i}{d\overset{\circ}{S}_i} = \overset{\circ}{\upsilon}_i - 1$ $\left(\overset{\circ}{\upsilon}_i = \dfrac{d\hat{S}_i}{d\overset{\circ}{S}_i},\ d\overset{\circ}{S}_i,\right.$ $d\hat{S}_i$ — длина материального отрезка в $\overset{\circ}{K}$ и K_t) соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma_i = \alpha_0 + \alpha_1(1+\overset{\circ}{\Lambda}_i)^2 + \alpha_2(1+\overset{\circ}{\Lambda}_i)^4 = \alpha_0 + \alpha_1\overset{\circ}{\upsilon}_i{}^2 + \alpha_2\overset{\circ}{\upsilon}_i{}^4 = \\ = \sigma_i(\overset{\circ}{\upsilon}_1,\overset{\circ}{\upsilon}_2,\overset{\circ}{\upsilon}_3) = \sigma_i(\overset{\circ}{\Lambda}_1,\overset{\circ}{\Lambda}_2,\overset{\circ}{\Lambda}_3).\end{aligned} \tag{94}$$

Последние соотношения удобно использовать при обработке экспериментальных данных и анализе теоретических результатов.

С учетом (83) и применяя вышеприведенные рассуждения, можно записать определяющие соотношения для несжимаемого изотропного упругого материала:

$$\sigma = -p\,\mathbf{E} + \alpha_1\mathbf{B} + \alpha_2\mathbf{B}^2 = -p\,\mathbf{E} + \beta_1\mathbf{B} + \beta_{-1}\mathbf{B}^{-1}. \tag{95}$$

Здесь p — произвольная индифферентная скалярная величина, α_1, α_2 (β_1, β_{-1}) являются функциями $I_1(\mathbf{B})$, $I_2(\mathbf{B})$, причем допустимыми являются деформации, сохраняющие неизменным объем, т. е. $I_3(\mathbf{B}) = 1$.

14. Затухающая память

В курсе МСС и в настоящем курсе неоднократно говорилось об одном из наиболее фундаментальных свойств материалов — свойстве **памяти**, под которым понимается зависимость реакции материала не только от текущих параметров кинематического и термодинамического типов, но и от всей истории их изменения. В то же время совершенно очевидно, что необходимость учета всей истории воздействий на материал до исследуемого момента времени t (т. е. $\forall\tau\in[-\infty,t]$) делает любую теорию “неработающей”. Действительно, исследователь никогда не обладает знаниями обо всей истории воздействий на исследуемый материал с момента сотворения мира (или хотя бы материала). Кроме того, возникли бы непреодолимые трудности при экспериментальном обосновании теории, определении необходимых материальных функций и констант.

Ситуация существенно улучшается тем, что наряду со свойством памяти материалы обладают не менее важным свойством — **забывания** истории воздействий по прошествии достаточно длительного времени. В ТОС это свойство описывается с помощью так называемого **принципа затухающей памяти.** Согласно этому принципу влияние предшествующих воздействий на текущую реакцию материала тем слабее, чем более отдаленным являлось воздействие. Иными словами, влияние двух одинаковых воздействий на реакцию материала в момент t, осуществленных в моменты $t_1 < t_2 < t$, различно — большим эффектом обладает воздействие в момент времени t_2.

Данный принцип допускает, хотя бы принципиально, экспериментальное обоснование и обеспечение теории, поскольку позволяет рассматривать эксперименты конечной (минимальной) продолжительности, так что любые воздействия, осуществляемые до начала эксперимента, оказывают пренебрежимо малое влияние на реакцию материала. Из экспериментальных исследований известно, что характерные времена “забывания” прежних воздействий различаются для разных материалов. В связи с этим в ТОС вводится понятие ***естественного времени*** для любого рассматриваемого материала (и, вообще, процесса термомеханического воздействия). Естественное время является мерой временного отрезка памяти материала, которое определяет, например, упомянутое выше минимальное время проведения эксперимента.

Ранее рассматривались упругие материалы, для которых реакция определяется только конечными значениями меры деформации относительно некоторого выбранного отсчетного состояния. Нетрудно показать, что аналогичный вид имеет определяющее соотношение произвольного простого материала при постоянной предыстории деформации (определяющий функционал вырождается в функцию). Это позволяет говорить о том, что **теория упругости** одновременно **является статикой простых материалов.** Однако в природе, очевидно, не существует никаких тел, которые всегда покоились, каждое из них испытывало в прошлом (возможно, в недалеком) определенные деформации. Тем не менее, статическая теория (теория упругости) находит чрезвычайно широкое применение в практике и приводит к удовлетворительным результатам. Последнее служит свидетельством того, что в определенном классе воздействий, происходящих "здесь и сейчас", материалы могут не помнить того, что с ними произошло в прошлом. Иначе говоря, успешное использование теории упругости является эмпирическим (в широком смысле) подтверждением наличия такого явления, как затухающая память.

Конечно, теория упругости во многих случаях не отражает реально существующих свойств материала, таких как релаксация, ползучесть, пластичность и т. д. При ее применении речь может идти не только о статике (или квазистатике), но и о движении, деформации — и в этих случаях теория упругости дает достаточно корректное описание поведения тела. Достаточно только, чтобы время "забывания" предыстории деформации было мало по сравнению с масштабом времени исследуемого явления. При этом время "забывания" существенно зависит от природы материала, от физической сущности исследуемого явления.

Например, для металлов при небольших деформациях и невысоких температурах реакция материала практически полностью определяется взаиморасположением атомов вещества. Любое изменение нагрузки приводит практически к мгновенному изменению взаиморасположения атомов (деформации). И наоборот — любое изменение взаиморасположения атомов, обусловленное деформацией, приводит практически мгновенно к изменению сил взаимодействия между атомами, или (в терминах МСС) — напряжений. При этом предыстория установления равновесного расположения атомов и траектории перехода атомов из одного равновесного положения в другое при рассматриваемой деформации не играют существенной роли.

Вообще говоря, определение затухающей памяти можно дать не единственным образом. Но поскольку данное свойство присуще реальным материалам, его определение и математическое описание должны в любом случае фигурировать в рациональной теории МСС. При этом математическое описание свойства затухающей памяти вводится в структуру рациональной теории с использованием определяющего отображения (функционала или функции) материала $\mathbf{F}$.

Обратимся к двум диаметрально различным (в смысле свойства памяти) примерам материалов. Особое место в контексте рассматриваемого вопроса занимает уже упомянутый выше упругий материал. Часто об упругом материале говорят как об обладающем **идеальной памятью о выбранной отсчетной конфигурации и не помнящем ни о какой другой конфигурации.** Конечно, данное утверждение верно в той части, в которой говорится о необходимости для определения реакции материала знания только значения градиента места $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}$ в рассматриваемый момент времени; при этом отсутствует потребность в информации об истории деформирования до момента t_0, соответствующего выбранной конфигурации K_0, и после него. Однако это утверждение не отражает факта **произвольности выбора** K_0**.** Отметим, что наблюдаемый момент t может быть сколь угодно далек (или сколь угодно близок) от момента t_0. Конфигурация K_0 может быть одной из бывших, но можно взять и любую другую (в том числе не реализующуюся); в принципе, момент t_0 может быть взят и из будущего. Единственное ограничение — в качестве t_0 не может выбираться текущее значение t, так как в этом случае возникает противоречие: функция $\mathbf{F}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r})$ в общем случае должна изменяться при постоянном аргументе $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r} = \mathbf{E}$.

Таким образом, пример упругого материала, с одной стороны, подтверждает наличие свойства затухания памяти материалов. С другой стороны, на примере упругого материала едва ли возможно сформулировать достаточно широкое определение понятия затухающей памяти (в принятом в МСС смысле). Скорее можно говорить о некоторой аномальной памяти, памяти вырожденного типа.

Иного типа памятью обладают линейно- и нелинейно-вязкие жидкости. Влияние деформации как таковой в этом случае может выражаться зависимостью параметров p, λ, μ от плотности $\hat{\rho}$ в текущем состоянии ("память упругого типа"), причем обычно это влияние несущественно. Отклик же материала полностью определяется изменением деформации в окрестности исследуемого момента времени t, или, что то же самое, **полем скоростей в момент t.** Если $\overset{\circ}{\nabla}\mathrm{r}$ поддерживается постоянным в некоторой окрестности момента t, то $\boldsymbol{\sigma} = -p(\hat{\rho})\mathbf{E}$ и не изменяется на этом промежутке. В связи с таким характером отклика говорят, что вязкие жидкости обладают ***инфинитезимальной*** (бесконечно малой) ***памятью***. По существу, реакция материала определяется характером изменения деформации на предшествующем моменту t бесконечно малом отрезке времени [t-dt, t]. При прекращении изменения деформации напряжения в вязких жидкостях мгновенно становятся нулевыми (за исключением — в некоторых моделях, — шаровой части). Предшествующие деформации, каковы бы они ни были и сколь бы недавно они не происходили, не влияют на реакцию вязких жидкостей (по крайней мере, на девиатор напряжений).

К материалам данного рода относятся также тела, поведение которых описываются соотношениями дифференциального типа, в частности — ***материалы Ривлина-Эриксена***, также имеющие инфинитезимальную память, но включающие производные по времени меры деформации более высокого, чем первый, порядка.

Следует отметить, что модели материалов с инфинитезимальной памятью непригодны для описания явления, называемого релаксацией напряжений. Действительно, как уже отмечалось выше, в материалах данного типа напряжения исчезают в момент прекращения изменения деформированного состояния. Явление релаксации, достаточно детально исследованное экспериментально, состоит в уменьшении напряжений, фиксируемых в момент прекращения деформирования, на конечном (часто — достаточно большом) промежутке времени. Следовательно, класс определяющих соотношений, используемый для описания процесса релаксации напряжений, должен исключать модели дифференциального типа.

Из сказанного выше следует, что **свойство затухающей (**во времени**) памяти не является общим свойством** всех без исключения материалов. Скорее, это некоторые ограничения на определяющие соотношения, пригодные для описания определенных процессов (в частности, релаксации напряжений, пластического деформирования и т. д.).

Следует отметить, что свойство “забывания” предыстории деформации известно и эксплуатируется (большей частью - неявным образом) в течение нескольких десятков лет в теории вязкоупругости, теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина и других. Здесь это понятие будет введено явным образом в математических терминах, с использованием специальных мер, понятий близости и непрерывности. Изложение в значительной мере опирается на монографии [1,5].

Медленно затухающая память

Для сокращения записи в дальнейшем будем рассматривать реакцию материала только на деформационные воздействия. Тогда общий вид определяющего соотношения простых материалов следующий:

$$\sigma = \mathbf{F}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t}), \qquad (96)$$

где, как и ранее, $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{t} \equiv (\mathbf{F}^{T})^{t}$ — история изменения градиента места. Рассмотрим различие статической реакции (реакции при неизменном деформированном состоянии) и произвольной другой. Введем обозначение: через $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}(t)^{C} \equiv (\mathbf{F}(t)^{C})^{T}$ (или просто $\mathbf{F}(t)^{C}$) будем обозначать постоянную предысторию деформации (предысторию-константу), соответствующую текущему значению $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}(t)$ градиента места для исследуемой частицы. *То есть, рассматривая произвольную историю деформирования* $\mathbf{F}^{t}$ *исследуемой частицы, мы каждому значению* **F**(t) *можем поставить в соответствие такую предысторию, которая в прошлом и настоящем равна значению* **F**(t)*, т. е.* $\mathbf{F}^{t} = \mathbf{F}(t)^{C} = \mathrm{const}$. *Постоянную предысторию, соответствующую моменту* t - s *(т. е.* $\mathbf{F}(t - s)$*) будем обозначать как* $[\mathbf{F}^t(s)]^C$*, где* $s \in [0,\infty)$ *и обозначает сдвиг по времени, отсчитываемый от момента* t *в прошлое.*

Чтобы иметь возможность рассматривать реакцию материала на такие предыстории, предполагается, что если $\mathbf{F}^t$ принадлежит области определения D функционала $\mathbf{F}$, то и $[\mathbf{F}^t(s)]^C$, $\forall s \in [0,\infty)$ принадлежит области определения этого функционала. В этом случае, имея определяющее соотношение вида (96), можно получить реакцию материала на любую постоянную предысторию $[\mathbf{F}^t(s)]^C$, соответствующую значению из действительной предыстории градиента деформаций $\mathbf{F}^t$ в момент времени t - s. При этом значение $\mathbf{F}(\mathbf{F}(t)^C)$ функционала $\mathbf{F}$ определяет напряжение σ в исследуемой точке, которое соответствует состоянию покоя в конфигурации, полученной из $\overset{\circ}{K}$ деформацией, градиент которой равен $\mathbf{F}(t)$.

Выше уже говорилось о том, что реакция упругого материала является статическим откликом. Для того, чтобы говорить об упругом материале и в случае изменяющихся деформаций, можно использовать общий вид определяющего соотношения (96) и понятие статического отклика: ***материал называется упругим***, если $\forall \mathbf{F}^t \in D$ из области определения D функционала $\mathbf{F}$ справедливо:

$$\mathbf{F}(\mathbf{F}^t) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(t)^C) = \boldsymbol{F}(\mathbf{F}(t)). \tag{97}$$

Заметим, что в силу данного определения ***статические*** напряжения часто называют ***упругими*** напряжениями, в то время как ***остаточные*** напряжения (соответствующие $\mathbf{F}(t) = \mathbf{E}$) называются ***неупругими***.

В основу понятия затухающей памяти положено условие, согласно которому при предыстории $\mathbf{F}^t$, близкой (в определенном смысле) к постоянной предыстории $\mathbf{F}(t)^C$, напряжения $\mathbf{F}(\mathbf{F}^t)$ близки к статическим напряжениям $\mathbf{F}(\mathbf{F}(t)^C)$. Иначе говоря, малое отклонение $\mathbf{F}^t$ от постоянной предыстории $\mathbf{F}(t)^C$ приводит к малым отклонениям напряжений, соответствующих предыстории $\mathbf{F}^t$, от статических напряжений. По существу, речь идет о **непрерывности отклика** материала в точке $\mathbf{F}(t)^C$ функционального пространства (двухвалентных тензорзначных функций). Для того, чтобы ввести математически точное определение непрерывности, необходимо ввести соответствующие определения “близости” и “малости”, которые устанавливаются с помощью топологии и подробнее будут рассмотрены ниже. *Следует подчеркнуть, что отмеченные понятия “близости” и “малости” составляют, как представляется, суть, ядро определения затухающей памяти.* После введения указанных понятий в качестве необходимого условия для затухающей памяти выступает следующая аксиома.

Аксиома непрерывности.

Реакция $\mathbf{F}$ непрерывна в каждой постоянной предыстории

$\mathbf{F}(t)^C \in D$.

Прежде, чем перейти к установлению близости, приведем некоторые интуитивные соображения. Поскольку в определении фигурирует слово "память", в определение близости обязательно должны входить истории изменения сравниваемых функций. В то же время речь идет о затухающей памяти, следовательно, при фиксированной величине отличия сравниваемых функций они должны быть тем "ближе", чем в более далеком прошлом это различие наблюдалось. Иначе говоря, сравниваемые функции должны быть близки, если они почти совпадают в недалеком прошлом, хотя могут существенно отличаться в отдаленном прошлом.

Физическая интерпретация используемого в определении затухающей памяти понятия непрерывности **существенно зависит** и связана с **вводимой топологией** (или метрикой). Наиболее просто топология определяется с помощью нормы.

Для тензоров второго ранга $\mathbf{A}$ норма $|\mathbf{A}|$ определена ранее с помощью двойного скалярного произведения: $|\mathbf{A}| = (\mathbf{A}:\mathbf{A}^T)^{1/2}$; тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются близкими друг другу, если норма $|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$ мала. Однако для рассматриваемых процессов деформирования, развивающихся во времени, такая "норма" является функцией времени, и в силу этого не согласуется с общепринятым понятием нормы. В силу этого обстоятельства для таких функций $|\mathbf{A}|(t)$ определяется, в свою очередь, некоторая норма или полунорма; при этом различным нормам или полунормам будут соответствовать различные интерпретации приведенной выше аксиомы.

Напомним, что вещественный функционал $||\mathbf{x}||$*, заданный на линейной системе* E*, называется полунормой, если он обладает следующими свойствами:*

1. $||\mathbf{x}|| \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathrm{E}$;
2. $||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda| ||\mathbf{x}|| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \Re$;
3. $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{E}$.

По сравнению с определением нормы здесь отсутствует требование $||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ *(*$\mathbf{0}$ *— нулевой элемент* E*), играющее в теории нормированных пространств весьма существенную роль. Очевидно, что для полунормы* $||\mathbf{0}|| = 0$*, однако не исключено, что* $||\mathbf{x}|| = 0$*, но* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$*. Например, полунорму функции* $x(t)$ *можно выбрать в виде* $||\mathbf{x}|| = |x(t_0)|$ *для фиксированного* t_0.

В качестве полунормы для рассмотрения реакции упругого материала как функции ($\mathbf{F} - \mathbf{E}$) можно использовать следующую: $||\mathbf{F}^t - \mathbf{E}|| = |\mathbf{F}(t) - \mathbf{E}|$, т. е. норму разности тензоров в момент t . *Очевидно, что в данном случае имеет место именно полунорма: из условия* $|\mathbf{A}(t)| = 0$ *для определенного момента времени* t *не следует* $\mathbf{A}(t) = 0 \ \forall t$. При таком выборе полунормы аксиома выполняется для любого упругого материала, реакция которого представляет собой тензорзначную функцию тензорного аргумента, непрерывную при $\mathbf{F} = \mathbf{E}$.

Однако приведенный выбор полунормы (для упругого материала) не отражает значений градиента деформации в моменты, предшествующие моменту t, и следовательно, данная полунорма не может быть использована для материалов с памятью.

Подобным образом аксиома выполняется для жидкости Навье-Стокса при выборе полунормы $\|\mathbf{F}^t - \mathbf{E}\| = |\mathbf{F}(t) - \mathbf{E}| + |\dot{\mathbf{F}}(t)|$ в случае, если реакция материала является непрерывной функцией при $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ и $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$. Такая полунорма также непригодна для рассмотрения материалов с памятью.

По существу, вопрос о наличии у материала свойства затухающей памяти сводится к установлению справедливости приведенной выше аксиомы непрерывности. Однако следует иметь в виду, что интерес представляют именно материалы с памятью (иногда говорят о материалах с “долгой” памятью), поэтому свойство материала помнить историю деформирования должно обязательно фигурировать в определениях и соответствующих утверждениях. В частности, если, например, хотя бы в малой окрестности $(t\text{-}\varepsilon, t)$ *момента* t *истории деформирования существенно отличаются, то существенно должны отличаться и реакции материала в момент* t *(хотя значения* $\mathbf{F}(t)$ *и* $\dot{\mathbf{F}}(t)$ *могут в сравниваемых историях совпадать). С использованием же рассмотренных выше полунорм само понятие памяти при рассмотрении свойства непрерывности не входит в определение (т. е. при выполнении аксиомы с использованием, например, полунормы* $\|\mathbf{A}^t\| = |\mathbf{A}(t)|$ *никакого отличия реакции материала при историях, отличающихся во всех точках, отличных от* t*, не должно быть).*

Таким образом, **выбор нормы или полунормы**, используемой при рассмотрении аксиомы непрерывности, **весьма существенен для решения вопроса о затухающей памяти.** Для материалов с “длительной” (“долгой”) памятью необходимо выбирать полунорму $\|\mathbf{F}^t\|$ таким образом, чтобы она учитывала всю историю деформирования, а не только окрестность момента t. При этом “вес” отдаленной истории деформирования, “вклад” ее в полунорму должен быть меньше, чем истории, непосредственно предшествующей моменту времени t.

Впервые математически строгое определение затухающей памяти в литературу по МСС ввели Колеман и Нолл. Здесь будут рассмотрены лишь основы теории материалов с затухающей памятью.

Забывающие меры. Слабо затухающая память

Напомним некоторые сведения из функционального анализа. Интеграл Стилтьеса от функции x(t) *по функции* g(t) *определяется как*

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,dg(t),$$

где a, b — *пределы изменения аргумента* t, g(t) — *так называемая функция ограниченной вариации. Для функции ограниченной вариации существует постоянная* M*, такая, что при любом разбиении отрезка* [a, b] *на конечное* *число отрезков с помощью точек* $a = t_0 < t_1 <...< t_n = b$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \le M.$$

Если множество таких сумм имеет конечную точную верхнюю границу, то этот предел называется полной вариацией функции g(t) *на отрезке* [a, b] *и обозначается* $\operatorname*{V}_a^b \mathrm{ar}\, g(t)$. *Известно, что функция ограниченной вариации может быть представлена в виде разности двух неубывающих функций.*

Лебегом была предложена процедура продолжения меры Стилтьеса на некоторую сигма-алгебру σ_g, *содержащую все борелевские (все открытые и все замкнутые) подмножества отрезка* [a, b]. *Меру* μ_g, *полученную таким образом, называют мерой Лебега-Стилтьеса, отвечающей функции* g , *а сама функция* g *называется производящей функцией данной меры. С помощью этой меры вводится интеграл Лебега-Стилтьеса.*

Рассматриваются тензорзначные функции (2-го ранга) **A(t)**, для которых модуль тензора $|\mathbf{A}(t)| = (\mathbf{A}(t){:}\mathbf{A}(t)^T)^{1/2}$ суммируем относительно некоторой меры Лебега-Стилтьеса μ на действительной прямой $\Re$. Норма (или полунорма) выбирается в виде

$$\|A\| = \Big(\int_{\Re} |A(s)|^2\, d\mu\Big)^{1/2}. \tag{98}$$

Мера μ полагается здесь порождаемой неубывающей функцией g(s), так что $\forall a,b \in \Re$ $(a \le b)$:

$$\mu\{[a,b]\} = g(b) - g(a). \tag{99}$$

При этом функция g(s) может иметь счетное число разрывов (1-го рода), для определенности полагается $g(s - 0) = g(s)$, т. е. в точках разрыва значение функции полагается равным ее пределу слева.

Здесь будут рассматриваться предыстории, представляющие собой функции, определенные на $[0, \infty)$, $s \ge 0$. *Напомним, что здесь аргумент определяет сдвиг от текущего момента* t *в прошлое, т. е. в терминах "обычного" времени рассматриваются интервалы* $[t - s, t]$, $s \in [0, \infty)$. *"Будущая история" не должна вносить вклада в полунорму предыстории; чтобы сохранить определение (98)-(99), доопределим функцию* g(s): $g(s) = 0\ \forall s \le 0$. Предыстории полагаются ограниченными функциями **A(t)**, т. е. $|\mathbf{A}(t)| < \infty\ \forall t$. Поскольку речь идет о затухающей памяти, естественно потребовать, чтобы **вся "давняя прошлая" история вносила только ограниченный вклад** в определяемую полунорму предысторий.

Указанные требования можно записать в виде ограничений на функцию g(s):

$$\begin{aligned} & g(s) \equiv 0 \quad \forall s \le 0, \\ & \lim_{s\to\infty} g(s) = M < \infty. \end{aligned} \tag{100}$$

Мера μ, порождаемая функцией g(s), удовлетворяющей требованиям (100), будет называться ***забывающей мерой***. Из (99) и (100) нетрудно установить, что перенесение любого конечного отрезка на бесконечно большое расстояние в прошлое делает его меру равной нулю:

$$\lim_{c\to\infty} \mu\{[a+c, b+c]\} = 0. \tag{101}$$

В силу ограниченности $|\mathbf{A}(s)|$ отсюда вытекает, что "вклад" в полунорму $||\mathbf{A}||$ от конечных участков предыстории в бесконечном прошлом равен нулю. Иначе говоря, если $|\mathbf{A}(s)|$ отлична от нуля только на конечном отрезке в бесконечном прошлом, то полунорма такой предыстории будет равна нулю, $|\mathbf{A}(s)| = 0$.

Введенная соотношением (98) полунорма с мерой, определенной соотношениями (99)-(100), будет называться соответствующим данной мере ***запоминанием истории*** **А.**

Обратимся к исходным посылкам для осмысления физического содержания вводимых определений. Для того, чтобы говорить о материале с затухающей памятью, необходимо, во-первых, иметь возможность сравнивать близость различных предысторий деформаций с учетом забывания предысторий (а следовательно, и разности предысторий); во-вторых, определять близость реакции материала в зависимости от близости предысторий (иначе говоря, определять непрерывность определяющего отображения при введенной топологии для предысторий). Согласно принципу затухающей памяти реакция материала на две почти совпадающие в недалеком прошлом истории деформации, которые в далеком прошлом могли существенно отличаться друг от друга, должна быть весьма близкой. Для материала с затухающей памятью должна быть введена такая метрика (или топология), которая определяет две такие предыстории как весьма близкие. Тогда с учетом второго условия требование затухающей памяти сводится к непрерывности функционала реакции по введенной таким образом метрике. При этом понятие непрерывности неотрывно от вводимой топологии, и полученный результат будет определяться именно вводимой метрикой.

Отметим, что в монографии [1] авторы, следуя Колеману и Ноллу, вводят затухающую память с помощью эквивалентного, но несколько отличающегося от приведенного выше подхода. С этой целью используется введенная Колеманом и Ноллом функция затухания h(s)*, обладающая следующими свойствами:*

$$h(0) = 1; \;\; h(s) \ge 0 \;\; \forall s > 0; \;\; \lim_{s\to\infty} s^N h(s) = 0,$$

где N *— целое число, называемое порядком функции затухания. Тогда полунорма предыстории определяется следующим соотношением:*

$$||\mathbf{A}|| = [\int_0^\infty |\mathbf{A}(s)|^k \, h(s) ds]^{1/k},$$

где k *— целое положительное число.*

Из приведенных определений нормы нетрудно увидеть два тривиальных случая, когда норма (полунорма) $||\mathbf{A}||$ мала:

а) $|\mathbf{A}(s)|$ малы $\forall s$;

б) $|\mathbf{A}(s)|$ принимает большие значения на множествах малой меры.

При этом из свойств меры следует, что чем дальше в прошлом от исследуемого момента времени t отстоит промежуток, на котором $|\mathbf{A}(s)|$ принимает большие значения, тем меньший вклад в норму $||\mathbf{A}||$ он дает.

При этом нетрудно заметить, что можно построить две истории $\mathbf{A}^t$ и $\mathbf{A}'^t$, отличающиеся на сколь угодно малом интервале $[0, \varepsilon]$, и в то же время иметь сколь угодно отличающиеся производные при $s = 0$. Для материалов дифференциального типа (например, жидкости Навье-Стокса) в этом случае едва ли следует ожидать близости отклика (несмотря на близость предысторий в смысле “забывающей” метрики). Следовательно, использование определения материалов с затухающей памятью с позиций непрерывности функционала по определенной “затухающей метрике” не является приемлемым для материалов дифференциального типа, имеющих бесконечно малую память. Приведенный пример еще раз подчеркивает важность определения топологии в установлении определения материалов с затухающей памятью.

Однако введенная с помощью забывающей меры топология применима для достаточно широкого круга материалов, в связи с чем имеет право на дальнейшее использование. При этом необходимо исключить из рассмотрения материалы дифференциального типа и, возможно, некоторые другие. Отметим, что для материалов дифференциального типа полунорму, с помощью которой будет устанавливаться непрерывность определяющего отображения, нетрудно ввести по аналогии с ранее приведенным примером.

Теперь с использованием понятия забывающей меры, введенной выше, можно установить точное (в математическом смысле) определение материалов со слабо затухающей (или длительной затухающей) памятью.

Определение (Ван [5]).

Материал имеет слабо затухающую память, если определяющее отображение материала удовлетворяет аксиоме непрерывности с помощью забывающей меры:

$$\sigma = \mathbf{F}(\mathbf{F}^t) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{F}(t)) + \mathbf{O}(1) \text{ при } ||\mathbf{F}^t - \mathbf{F}(t)^C|| \to 0, \quad (102)$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{F}(t)) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{F}^C). \quad (103)$$

В соотношении (102) член $\mathbf{O}(1)$ *имеет порядок малости выше первого по* $\|\mathbf{F}^{t} - \mathbf{F}(t)^{C}\|$ *и при стремлении нормы к нулю стремится к нулевому тензору со скоростью выше первой степени нормы.*

Отметим, что здесь понятие затухающей памяти вводится с помощью простейшей — постоянной — предыстории. Однако ничто не препятствует введению данного понятия с помощью некоторой произвольной, выбранной за "эталонную", предыстории и близких к ней по забывающей мере предысторий. В этом случае в определении следует сохранить функционал, а не функцию, как в (102).

Таким образом из определения следует, что если история $\mathbf{F}^{t}$ в смысле выбранной забывающей меры мало отличается от постоянной предыстории $\mathbf{F}(t)^{C}$, то реакция материала в момент времени t представляет собой приблизительно упругую (статическую) реакцию, соответствующую $\mathbf{F}(t)$.

Для упругого материала остаточный член в (102) должен быть в точности равен нулевому тензору, поэтому в соответствии с вышеприведенным определением в этом случае забывающая мера должна быть такой, что $\|\mathbf{F}^{t} - \mathbf{F}(t)^{C}\|$. Обратно, если справедливо (102) с остаточным членом, равным нулю, то материал является упругим.

Следует подчеркнуть, что для каждого конкретного класса материалов имеет место свой вид затухающей памяти, а следовательно, каждому классу соответствует надлежащим образом выбранная мера и функция g, с помощью которой она вводится.

Настоящий курс лекций в силу ограниченности объема не претендует на полное изложение общей теории определяющих соотношений. В то же время мы попытались изложить основные понятия, определения и концепции развития ТОС, существующие в настоящее время. Более детальное изложение интересующийся читатель может найти в, цитируемой в предлагаемой работе, литературе.

Авторы выражают искреннюю благодарность Е.В. Астраханцевой за большую работу по набору рукописи.

Упражнения

1. Определить типы объективности следующих векторных характеристик: материальных волокон в отсчетной $d\mathbf{X}_0$ и актуальной $d\mathbf{x}$ конфигурациях, векторов основного $\overset{\circ}{\mathbf{э}}_i, \hat{\mathbf{э}}_i$ (i=1,2,3) и взаимного $\overset{\circ}{\mathbf{э}}{}^i, \hat{\mathbf{э}}^i$ (i=1,2,3) лагранжева базиса в отсчетной и актуальной конфигурациях, ориентированных материальных площадок в отсчетной $\mathbf{N}d\Pi$ и актуальной $\mathbf{n}d\pi$ конфигурациях, векторов $\overset{\circ}{\mathbf{a}}{}^i = \overset{\circ}{\mathbf{э}}_j \times \overset{\circ}{\mathbf{э}}_k$ (индексы i,j,k образуют четную подстановку тройки чисел 1,2,3) ориентированных площадок, натянутых на векторы основного лагранжева базиса в отсчетной конфигурации, векторов $\overset{\circ}{\mathbf{a}}_i = \overset{\circ}{\mathbf{э}}{}^j \times \overset{\circ}{\mathbf{э}}{}^k$, $\hat{\mathbf{a}}^i = \hat{\mathbf{э}}_j \times \hat{\mathbf{э}}_k$, $\hat{\mathbf{a}}_i = \hat{\mathbf{э}}^j \times \hat{\mathbf{э}}^k$ (i,j,k=1,2,3 образуют четную подстановку), смысл которых устанавливается аналогично $\overset{\circ}{\mathbf{a}}{}^i$.
2. Определить, какие векторные характеристики из перечисленных в упр. 1 являются простыми аналогами для

   а) основной диаграммы Лагранжа с $\mathbf{T}_{(01)} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{T}_{(10)} = \hat{\nabla}\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}$;

   б) диаграммы Лагранжа с $\mathbf{T}_{(01)} = \hat{\nabla}\mathbf{R}_0$, $\mathbf{T}_{(10)} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}$;

   в) основной диаграммы Лагранжа-Якоби с $\mathbf{T}_{(01)} = J^{-1}\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{T}_{(10)} = J\hat{\nabla}\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}$, $J = \det(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r})$;

   г) взаимной диаграммы Лагранжа-Якоби с $\mathbf{T}_{(01)} = J\hat{\nabla}\mathbf{R}_0$, $\mathbf{T}_{(10)} = J^{-1}\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}$.
3. Определить пары материальных и пространственных аналогов, могущих быть связанными диаграммами

   а) нейтральной с $\mathbf{T}_{(10)}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{T}_{(01)}=\mathbf{R}$;

   б) коротационной с $\mathbf{T}_{(10)} = \mathbf{R}_{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{T}_{(01)} = \mathbf{R}_{\mathbf{U}}$;

   в) коротационной с $\mathbf{T}_{(10)} = \mathbf{R}_{\mathbf{V}}$, $\mathbf{T}_{(01)} = \mathbf{R}_{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}$.
4. Определить типы объективности следующих тензоров, характеризующих деформации: градиентов места, градиентов перемещений, мер деформаций Коши-Грина, Альманси, обратной Коши-Грина, Фингера, левой и правой мер искажения, левой и правой мер Генки, тензоров деформаций, ортогонального тензора, сопровождающего деформацию.
5. Определить типы объективности различных объективных производных тензоров, характеризующих деформации (упр. 4), тензора деформации скорости и тензора вихря.
6. Определить типы объективности следующих тензоров, характеризующих напряжения: тензора напряжений Коши, первого, второго и взвешенного тензоров напряжений Пиола-Кирхгоффа, тензора напряжений Био, энергетического тензора напряжений (верхней конвективной формы тензора на-

пряжений) $\mathbf{Q} = \hat{\nabla}\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}} \cdot \sigma \cdot \hat{\nabla}\mathbf{R}_0$, нижней $\mathbf{T}_{\mathrm{lw}} = \mathring{\nabla}\mathbf{r} \cdot \sigma \cdot \mathring{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$, правой $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = \hat{\nabla}\mathbf{R}_0 \cdot \sigma \cdot \mathring{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$ и левой $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = \mathring{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \sigma \cdot \hat{\nabla}\mathbf{R}_0$ конвективных форм тензора напряжений, ротационной формы тензора напряжений $\mathbf{T}_{\mathrm{rt}} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \sigma \cdot \mathbf{R}$.

7. Определить типы объективности следующих объективных производных тензора напряжений Коши: R-производной, производных Олдройда, Коттер-Ривлина, левой $\sigma^{\mathrm{l}} = \dot{\sigma} - \hat{\nabla}\mathrm{v}^{\mathrm{T}} \cdot \sigma + \sigma \cdot \hat{\nabla}\mathrm{v}$ и правой $\sigma^{\mathrm{r}} = \dot{\sigma} + \hat{\nabla}\mathrm{v} \cdot \sigma - \sigma \cdot \hat{\nabla}\mathrm{v}^{\mathrm{T}}$ конвективных производных.
8. Доказать тождества $\sigma^{\mathrm{Tr}} = \mathrm{J}^{-1}\mathring{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{K}} \cdot \mathring{\nabla}\mathbf{r}$, $\sigma^{\mathrm{H}} = \mathrm{J}^{-1}\mathring{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{P}}$ и с их помощью выяснить вопрос об объективности производных Труселлла и Хилла.
9. Построить простые диаграммы **Грина-Альманси** с $\mathbf{T}_{\mathrm{i}(10)} = \hat{\nabla}\mathbf{R}_0$, $\mathbf{T}_{\mathrm{i}(01)} = \mathring{\nabla}\mathbf{r}$ (i=1,2) для объективных тензоров Коши-Грина ($\mathbf{A}_{(00)}$) и Альманси ($\mathbf{A}_{(11)}$). Определить пару двухточечных объективных простых аналогов ($\mathbf{A}_{(01)}$, $\mathbf{A}_{(10)}$) этих тензоров.
10. Построить простые диаграммы Грина-Альманси (упр. 9) для объективных материальной производной тензора деформаций Коши-Грина и тензора деформации скорости. Определить недостающую пару простых аналогов.
11. Найти простые аналоги диаграммы Грина-Альманси (упр. 9) по $\mathbf{A}_{(00)}=\mathring{\mathbf{G}}$ (мера Коши-Грина).
12. Найти простые аналоги диаграммы Грина-Альманси (упр. 9) по $\mathbf{A}_{(00)}=\hat{\mathbf{G}}$ (мера Альманси).
13. Построить простые диаграммы **Коши-Ильюшина** с $\mathbf{T}_{\mathrm{i}(10)} = \mathring{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{T}_{\mathrm{i}(01)} = \hat{\nabla}\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}$, (i=1,2) для объективных тензора напряжений Коши и энергетического тензора напряжений (упр. 6). Определить недостающую пару простых аналогов.
14. Построить простые диаграммы Коши-Ильюшина (упр. 13) для объективных тензоров деформаций $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathring{\mathbf{G}}^{-1})$ ($\mathring{\mathbf{G}}^{-1}$ — левая мера Коши-Грина) и $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{I})$ ($\mathbf{F} \equiv \hat{\mathbf{G}}^{-1}$ — мера Фингера). Определить недостающую пару простых аналогов.
15. Найти простые аналоги диаграммы Коши-Ильюшина по $\mathbf{A}_{(00)}= \mathring{\mathbf{G}}^{-1}$.
16. Найти простые аналоги диаграммы Коши-Ильюшина по $\mathbf{A}_{(11)}= \mathbf{F}$.
17. Построить простую диаграмму **Коши-Пиола** с $\mathbf{T}_{1(10)} = \mathring{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{T}_{1(01)} = \hat{\nabla}\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{T}_{2(10)} = \mathrm{J}^{-1}\mathring{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{T}_{2(01)} = \mathrm{J}\hat{\nabla}\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}$ для объективных тензора напряжений Коши и второго тензора напряжений Пиола-Кирхгоффа. Определить недостающую пару простых аналогов (тензоров напряжений).

18. Построить простую диаграмму **Коши-Хилла** с $\mathbf{T}_{1(10)} = J^{-1}\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{T}$, $\mathbf{T}_{1(01)} = J\hat{\nabla}\mathbf{R}_0^{T}$, $\mathbf{T}_{2(10)} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{T}$ и $\mathbf{T}_{2(01)} = \hat{\nabla}\mathbf{R}_0^{T}$ для объективных тензора напряжений Коши и второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгоффа. Определить недостающую пару простых аналогов.
19. Построить простую **нейтральную** диаграмму с $\mathbf{T}_{i(10)}=\mathbf{R}$, $\mathbf{T}_{i(01)}=\mathbf{R}^{T}$ ($i=1,2$, $\mathbf{R}$ — ортогональный тензор, сопровождающий деформацию) для левой $\mathbf{U}$ и правой $\mathbf{V}$ мер искажений, найти недостающую пару простых аналогов.
20. Построить простую нейтральную диаграмму (упр. 19) для левой $\overset{\circ}{\mathbf{H}}$ и правой $\hat{\mathbf{H}}$ мер Генки, найти недостающую пару простых аналогов.
21. Найти другие простые аналоги мер и тензоров деформаций, связанные нейтральной диаграммой (упр. 19).
22. Построить простые **косые** диаграммы **Хилла-Седова** с $\mathbf{T}_{1(10)} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{T}$, $\mathbf{T}_{1(01)} = \hat{\nabla}\mathbf{R}_0^{T}$, $\mathbf{T}_{2(10)} = \hat{\nabla}\mathbf{R}_0$, $\mathbf{T}_{2(01)} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}$ и $\mathbf{T}_{1(10)} = \hat{\nabla}\mathbf{R}_0$, $\mathbf{T}_{1(01)} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}$, $\mathbf{T}_{2(10)} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{T}$, $\mathbf{T}_{2(01)} = \hat{\nabla}\mathbf{R}_0^{T}$ для мер деформаций (Коши-Грина, Альманси, левой Коши-Грина, Фингера), соответствующих этим мерам тензоров деформаций.
23. Построить простые **коротационные** диаграммы с $\mathbf{T}_{i(10)}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{Q}$, $\mathbf{T}_{i(01)}=\mathbf{Q}^{T}\cdot\mathbf{R}^{T}$ ($i=1,2$, $\mathbf{R}$ — ортогональный тензор, сопровождающий деформацию, $\mathbf{Q}$ — произвольный инвариантный ((00)-объективный)) ортогональный тензор).
24. Проверить выполнение принципа материальной индифферентности для закона Гука $\sigma = \lambda I_1(\varepsilon)\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon$. В случае невыполнения принципа исправить необходимым образом это определяющее соотношение.
25. Предложить варианты пар мер напряжений $\mathbf{X}$ и скоростей деформаций $\mathbf{Y}$ **(**объективных производных мер и тензоров деформаций**)** для различных формулировок определяющего соотношения пластического течения Сен-Венана-Мизеса $\mathbf{Y} = \dfrac{3Y_{\text{и}}}{2X_{\text{и}}}\mathbf{X}$, удовлетворяющих принципу материальной индифферентности.

1. Для определяющего соотношения обобщенного уравнения Максвелла $\sigma + \lambda_1\sigma^{\mathbf{J}} = 2\mu(\mathbf{D} + \lambda_2\mathbf{D}^{*})$, механическая модель которого представлена на рис. 6, найти вид объективной производной *, удовлетворяющей принципу материальной индифферентности (λ_1,λ_2,μ — объективные скаляры).

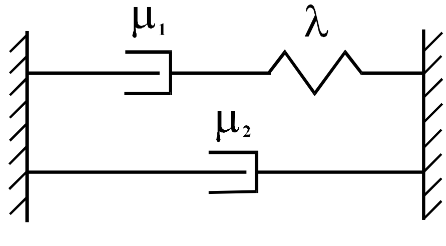

Рис. 6

2. Проверить выполнение принципа материальной индифферентности для определяющего соотношения пластического течения Й. Охаши $\sigma = k_0\mathbf{I} + k_1\mathbf{L}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{L}^{T} + k_2\mathbf{L}\cdot\mathbf{D}^2\cdot\mathbf{L}^{T}$, где $\mathbf{L} = \mathbf{s}_i\delta_i$, $\mathbf{s}_i,\delta_i$, $i=1,2,3$ — единичные соб-

ственные векторы тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{D}$ соответственно, k_0, k_1, k_2 — объективные скаляры.

3. Для проверки пригодности определяющих соотношений упругости (гиперупругости) Колеманом и Ноллом был предложен критерий монотонности тензорной функции: $\left(\boldsymbol{P}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{x}) - \boldsymbol{P}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r})\right):((\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{x})^{\mathrm{T}} - \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}) > 0$, $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}^{x} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\cdot\mathbf{S}$, $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$, $\boldsymbol{P}$ — первый тензор напряжений Пиола-Кирхгоффа. Показать, что при $\mathbf{S} \in \mathrm{O}$ (ортогональная группа) принцип материальной индифферентности ограничивает применимость критерия узким классом напряженных состояний. Получить ограничения на вид напряженного состояния. (Указание: использовать инвариантное представление ортогонального тензора.)
4. Проверить выполнение принципа материальной индифферентности для определяющих соотношений деформационной теории пластичности. В случае невыполнения принципа исправить необходимым образом это определяющее соотношение.
5. Получить выражение тензора напряжений, осуществляющего идеальные связи, для композиционного материала, армированного двумя системами жестких прямолинейных волокон при произвольном угле между направлениями волокон.
6. Как в предыдущем упр., но для трех систем жестких прямолинейных волокон для произвольных ориентаций направлений волокон.
7. Для заданного направляющего тензора запрещенных деформаций определить вид уравнения простой связи и тензора напряжений, осуществляющего идеальную связь, рассмотреть частные случаи, предложить конструктивную схему реализации связи.

1. Монокристалл кадмия, имеющий гранецентрированную плотноупакованную (ГП-) решетку, может испытывать пластические деформации простыми сдвигами параллельно определенным плоскостям скольжения вдоль определенных направлений скольжения. Определить вид уравнения простой связи и тензора напряжений, осуществляющего идеальную связь, если реализуются системы скольжения семейства а) $\{0001\}$, $<11\overline{2}0>$ (рис. 7); б) дополнительно к *а)* $\{1\overline{1}00\}$, $<11\overline{2}0>$; в) дополнительно к *а)* и *б)* $\{1\overline{1}01\}$, $<11\overline{2}0>$.

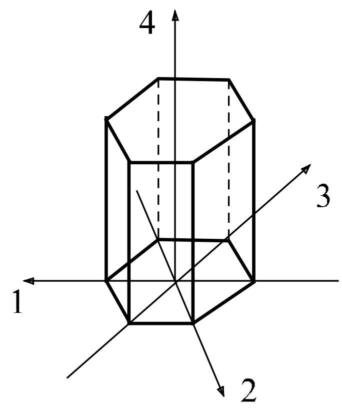

Рис. 7

2. Как в предыдущем упр., но для монокристалла цинка с ГП-решеткой, если реализуются системы скольжения семейства а) $\{0001\}$, $<11\overline{2}0>$; б) дополнительно к *а)* $\{1\overline{1}00\}$, $<11\overline{2}0>$; в) дополнительно к *а)* и *б)* $\{11\overline{2}\overline{2}\}$, $<11\overline{2}3>$.

3. Как в упр. 33, но для монокристалла титана с ГП-решеткой, если реализуются системы скольжения семейства а) $\{1\bar{1}00\}$, $<11\bar{2}0>$; б) дополнительно к *а)* $\{0001\}$, $<11\bar{2}0>$; в) дополнительно к *а)* и *б)* $\{10\bar{1}1\}$, $<11\bar{2}0>$.
4. Для простого однородного тела определить общий вид закона движения (движение полюса и аффинор), обеспечивающего однородную деформацию тела (при наличии массовых сил).
5. Для полученного в упр. 36 закона движения определить градиенты скорости перемещений в отсчетной и актуальной конфигурациях; установить условия изохоричности движения [5].
6. Установить конкретный вид аффинора для однородного простого тела при однородной деформации "чистого" растяжения по трем взаимно перпендикулярным направлениям и деформации простого сдвига.
7. Установить условия реализуемости однородного "чистого" растяжения (по трем взаимно перпендикулярным направлениям) простого однородного материала.
8. Для однородных деформаций простого однородного тела предложить и обосновать способы разложения движения на квазитвердое и деформационное.
9. Полагая, что материальное тело представляет собой монокристалл (с ГЦК- или ОЦК-решетками), является жестко-пластическим, пластическое деформирование определяется скольжением по плоскостям плотнейшей упаковки в направлениях плотнейшей упаковки, определить группы равноправности неискаженной отсчетной конфигурации и записать тензоры преобразования в компонентах кристаллографических осей.
10. Полагая, что упругое тело представляет собой поликристалл, состоящий из зерен-монокристаллов с ГЦК- или ОЦК-решетками, для процедур осреднения по объему и по ориентациям установить группы равноправности неискаженной конфигурации для различных законов распределения ориентации зерен.
11. В условиях упр. 41 определить преобразование группы равноправности для случаев простого (растяжение, простой сдвиг) и сложного (двухзвенные траектории деформирования) нагружения.
12. Доказать теорему 2 (о связи неискаженных конфигураций изотропного твердого тела).
13. Доказать теорему 3 (о связи неискаженных конфигураций твердого тела).
14. Получить приведенную форму определяющих соотношений упругого тела (81).
15. Доказать теорему о виде определяющих соотношений и неискаженной конфигурации изотропного упругого тела.
16. Доказать теорему Ривлина-Эриксена.
17. Получить в общем виде определяющие соотношения упругого трансверсально изотропного материала.

18. Установить общий вид определяющих соотношений ортотропного упругого материала.
19. Разработать программу экспериментального установления материальных функций, входящих в определяющие соотношения изотропного упругого материала.
20. Разработать процедуру идентификации материальных функций для трансверсально изотропного и ортотропного упругих тел.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

Дополнительный

6. Бровко Г.Л. Развитие математического аппарата и основ общей теории определяющих соотношений механики сплошной среды: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1996. 385 с.
7. Шаскольская М.П. Кристаллография. М.: Высшая школа, 1984. 376 с.
8. Штрайтвольф Г. Теория групп в физике твердого тела. М.: Мир, 1971. 262 с.
9. Noll W. A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media. Arch. Rational Mech. Anal. 1958. V.2. P. 197-226.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

П.В. Трусов, И.Э. Келлер

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Курс лекций

Часть I

Общая теория

Редактор и корректор И.Н. Жеганина

Лицензия № 020370 от 29. 01.97

Подписано к печати 10.10.97. Печать офсетная.
Формат 60 x 90/16. Усл. печ. л. 6,25. Тираж 100 экз.
Заказ № 98

Редакционно-издательский отдел и ротапринт
Пермского государственного технического университета
Адрес: 614600, Пермь, Комсомольский пр., 29а